СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
МОСКВА
КРАСНОДАР
2023

УДК 519.2
ББК 22.17я73

С 23 Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для вузов / И. А. Кацко, П. С. Бондаренко, Г. В. Горелова [и др.]. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 204 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-507-45493-8

Сборник содержит свыше 600 задач и упражнений и предназначен для использования на практических занятиях, самостоятельной работы и выполнения контрольных работ по курсу теории вероятностей и математической статистики для студентов вузов. При составлении сборника авторы с целью повышения интереса к дисциплине и возможности изучения студентами в дальнейшем прикладной статистики (анализа данных) и других дисциплин, объединяемых сегодня под названием прикладная статистика или «наука о данных» (data science) использовали как собственные задачи, так и задачи из сборников, отраженных в списке литературы.

Сборник вместе с учебником авторов представляют собой учебно-методический комплекс, соответствующий требованиям ФГОС ВО последнего поколения, который предназначен для обучающихся в вузах по экономическим и связанным с IT-направлениям подготовки и может быть полезен студентам, аспирантам, преподавателям и специалистам.

УДК 519.2
ББК 22.17я73

Рецензенты:

Л. И. НИВОРОЖКИНА — доктор экономических наук, профессор, зав. кафедрой статистики, эконометрики и оценки рисков Ростовского государственного экономического университета, заслуженный деятель науки РФ;
А. И. ОРЛОВ — доктор технических наук, доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры экономики и организации производства Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Важно общение и передача культуры. Воспитание.
Формирование умения мыслить, анализировать.
А не просто усваивать что-то, что можно найти
в Интернете, справочниках.
(В. Н. Волкова, 2019 г.)

На современном этапе развития российского общества в стране проводятся многочисленные исследования, перенимается и пропагандируется опыт в области экономики, экономической безопасности, финансов, аналитики, управления, бизнеса, бизнес-информатики, прикладной информатики, информационных систем и технологий, биологии, инженерии и т. д. Одним из важнейших моментов в деятельности руководителя является принятие решений в условиях неопределённости. При этом наиболее разработанным инструментарием выступает теория вероятностей и математическая статистика, позволяющая решать задачи принятия решений в условиях вероятностной неопределённости и имеющая достаточно развитое программное обеспечение, в том числе свободно распространяемое, например в $MS\ Excel$ (надстройка пакета анализа, примеры использования которого имеются в тексте), $JASP, Gretl$, языки программирования с открытым кодом ($R, Python$) и др. Сегодня уделяется все больше внимания вопросам аналитики, анализа данных, оперирующих различными вероятностными (геометрическими, логическими) моделями, методами статистического обучения, понятиями зависимости, независимости и т. д. Кроме того, тиражируются курсы по аналитике данных, машинному обучению, статистическому обучению, бизнес-аналитике, $Big\ Data$ и др. Поэтому с целью повышения интереса к дисциплине и возможности изучения обучающимися в дальнейшем прикладной статистики (анализа данных) и других дисциплин, объединяемых сегодня под названием «наука о данных» ($data\ science$), было решено выделить из нашего учебника [10] отдельно задачи и сформировать сборник задач и упражнений для проведения практических занятий и самостоятельной работы обучающихся, включающий как авторские [8, 10], так и наиболее интересные и современные задачи, в том числе принадлежащие авторам книг, отраженных в списке литературы, за что мы им искренне и глубоко благодарны. Также выражаем признательность А. Л. Донсковой за помощь в подготовке сборника к изданию и коллегам, принимавшим участие в обсуждении и написании ряда разделов: Г. Г. Гоник (раздел 12), А. Е. Жминько (раздел 14), А. Е. Сеннковой (раздел 16). Авторы надеются, что предлагаемый сборник задач позволит сформировать у обучающихся «вероятностную» составляющую системного мышления и позволит применять полученные навыки умения мыслить, анализировать в практической деятельности.

«...не проворным достается успешный бег, не храбрым — победа,
не мудрым — хлеб, и не у разумных богатство,
и не искусным — благорасположение, но время и случай для всех их».
(Экклезиаст, 9.11)

ЧАСТЬ I.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. А. Чупров сравнивает вероятность с центром тяжести тела, с Гринвичским меридианом, с линией экватора. Перечисленные понятия механики, географии не существуют в действительности, это воображаемые точки, линии, но они служат инструментом, методом познания окружающего нас мира, а связь частостей с вероятностями позволяет раскрыть причинные связи там, где принцип причинности в явной форме применить нельзя.

А. Л. Вайнштейн, Н. С. Четвериков.

Одна из наиболее бросающихся в глаза общих тенденций современной математики и ее приложений состоит в резком повышении роли тех разделов науки, которые анализируют явления, имеющие «случайный» характер, и основываются на теории вероятностей. И всего лишь «небольшим преувеличением» прозвучала шутка известного американского математика Дж. Дуба, начавшего свой доклад в Московском математическом обществе словами: «Всем специалистам по теории вероятностей хорошо известно, что математика представляет собой часть теории вероятностей». ...в наше время основы теории вероятностей должны входить в научный багаж каждого образованного человека.

И. М. Яглом

Теорию вероятностей и статистику можно без преувеличения назвать основой всего машинного обучения вообще и значительной доли других исследований в рамках искусственного интеллекта. Даже если алгоритм, на первый взгляд, не использует вероятности или случайные процессы, при ближайшем рассмотрении наверняка окажется, что для его анализа придется привлекать вероятность.

С. И. Николенко, А. Л. Тулупьев

Математическая статистика — задача (раздел) теории вероятностей,
Машинное обучение — раздел теории вероятностей.
Есть две категории людей, говорящих на эту тему, но…
Программирующие на Python (точнее, подключающие библиотеки) говорят: «машинное обучение»,
Работающие с Power Point говорят: «искусственный интеллект».

Из серии "Relato Refero"

...истинной логикой этого мира является исчисление вероятностей, занимающееся нахождением величин вероятностей, которые учитывает или должен учитывать любой здравомыслящий человек.

Дж. Максвелл

Есть люди, полагающие, что математика — это нудное занятие, которое всегда уныло и скучно; мы же находим математику развлечением и не стыдимся признаться в этом.

Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник.

На книжной полке рядом стоят два тома Пушкина: первый и второй. Страницы каждого тома имеют вместе толщину 2 см, а каждая обложка — 2 мм. Червь прогрыз (перпендикулярно страницам) от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома. Какой путь он прогрыз? [Эта топологическая задача с невероятным ответом — 4 мм — совершенно недоступна академикам, но некоторые дошкольники легко справляются с ней.]

В. И. Арнольд. Задачи для детей от 5 до 15, 2004

Конечно, мы будем учиться доказывать, но будем также учиться догадываться.

Д. Пойа

1. Случайные события

1.1. Случайные события, алгебра событий

Событие есть возможный результат опыта или испытания. Простейшие неразложимые результаты опыта называются элементарными событиями (ω), а совокупность элементарных событий называется пространством элементарных событий: $\Omega = \{\omega\}$. Любые подмножества Ω называются событиями и обозначаются буквами A, B, C и так далее или A_1, A_2, A_3 и так далее.

Достоверным называется событие Ω, которое в данном опыте обязательно произойдет.

Невозможным называется событие $\overline{\Omega}$, которое в данном опыте не может произойти.

Случайным называется событие, которое в данном опыте или испытании может произойти, а может и не произойти.

События называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появление других в данном опыте. Если события не могут появиться в одном опыте, то они называются *несовместными*. Несколько событий называются *попарно-несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе в данном опыте.

События называются *единственно возможными*, если в результате испытания обязательно произойдет какое-то из этих событий.

Совокупность несовместных и единственно возможных событий образует *полную группу событий*.

События являются *равновозможными*, если имеются основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пусть S — множество подмножеств конечного пространства Ω (включая $\emptyset$), для которого выполняются следующие свойства:

1) если $A \in S$ и $B \in S$, то $A + B = A \cup B \in S$;

2) если $A \in S$ и $B \in S$, то $AB = A \cap B \in S$;

3) если $A \in S$, то $\overline{A} \in S$, тогда множество S называется алгеброй событий (полем событий).

Если пространство Ω счетное (эквивалентно ряду натуральных чисел) или непрерывное (имеющее мощность множества континуум), то система подмножеств, замкнутая относительно алгебраических операций (1–3) над счетным числом событий, называется σ-алгеброй (борелевским полем событий).

Пример 1. Стрелок произвел 3 выстрела по мишени, элементарные события:

— A_1 — попал при 1-м выстреле; $\overline{A}_1$ — не попал при 1-м, выстреле;

— A_2 — попал при 2-м выстреле; $\overline{A}_2$ — не попал при 2-м, выстреле;

— A_3 — попал при 3-м выстреле; $\overline{A}_3$ — не попал при 3-м, выстреле.

Выразим через A_1, A_2, A_3 и их отрицания следующие события:

а) одно попадание: $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;

б) три промаха: $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;

в) три попадания: $C = A_1A_2A_3$;

г) хотя бы один промах: $D = A + B + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$ или $D = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$;

д) не менее двух попаданий: $E = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + C$;

е) не более одного попадания: $F = A + B$;

ж) попадание в мишень после промаха при первом выстреле:

$$G = \overline{A}_1\left(\overline{A}_2A_3 + A_2\overline{A}_3 + A_2A_3\right);$$

з) хотя бы одно попадание:

$$H = A_1 + A_2 + A_3 = A + E.$$

1. Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт — бросание двух монет. События: A_1 — появление двух гербов, A_2 — появление двух цифр;

б) опыт — три выстрела по мишени. События: B_1 — хотя бы одно попадание, B_2 — хотя бы один промах;

в) опыт — бросание двух игральных костей. События: C_1 — хотя бы на одной кости появилось три очка, C_2 — появление четного числа очков на каждой кости;

г) опыт — извлечение двух шаров из урны, содержащей белые и черные шары. События: D_1 — взято два белых шара, D_2 — оба извлеченных шара одного цвета;

д) опыт — покупка двух лотерейных билетов. События: E_1 — выиграют два билета, E_2 — выиграет хотя бы один билет, E_3 — выиграет только один лотерейный билет;

е) опыт — лифт отправляется с 10 пассажирами и останавливается на пяти этажах. События: F_1 — на первых четырех остановках вышло не более 9 человек, F_2 — на последней остановке вышел хотя бы один человек.

2. Образуют ли полную группу следующие события:

а) опыт — два выстрела по мишени. События: A_1 — два попадания в мишень, A_2 — хотя бы один промах по мишени;

б) опыт — бросание двух игральных костей. События: B_1 — сумма очков на верхних гранях больше 3, B_2 — сумма очков на верхних гранях равна 3;

в) опыт — посажено четыре зерна. События: C_1 — взошло одно зерно, C_2 — взошло два зерна, C_3 — взошло три зерна, C_4 — взошло четыре зерна;

г) покупатель посещает три магазина. События: D_1 — покупатель купит товар хотя бы в одном магазине, D_2 — покупатель не купит товар ни в одном магазине.

3. Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт — выстрел по мишени. События: A_1 — попадание при выстреле, A_2 — промах при выстреле;

б) опыт — бросание двух игральных костей. События: B_1 — произведение очков на верхних гранях равно 12, B_2 — сумма очков на верхних гранях равна 9;

в) опыт — бросание двух монет. События: C_1 — появление двух гербов, C_2 — появление двух цифр, C_3 — появление одного герба и одной цифры.

Замечание. В данном случае (пункт в) возможно несколько подходов, связанных с различными статистическими моделями физических частиц.

1. Модель (статистика) Больцмана — Максвелла (частицы различимы, хотя известно, что таких частиц в природе не существует). Для опыта с монетами: $Г_1Г_2$, $Г_1Р_2$, $Г_2$ $Р_1$, $Р_1Р_2$ (монеты различимы).

2. Модель Бозе — Эйнштейна (частицы неразличимы, например фотоны, атомные ядра, атомы с четным числом частиц). Для опыта с монетами: $Г_1Г_2$, $Г_1Р_2$, $Р_1Р_2$ (монеты неразличимы).

3. Модель Ферми — Дирака (частицы не могут принимать одинаковые значения, например электроны, нейтроны, протоны). Для опыта с монетами: $Г_1Р_2$, $Г_2Р_1$.

Опыты с монетами показывают, что здесь выполняется статистика Больцмана — Максвелла, поэтому нельзя заранее, до проведения эксперимента, утверждать истинность той или иной модели.

4. Брошены 3 монеты. Составьте события, образующие полную группу. Сколько равновозможных исходов образуют полную группу событий? Укажите элементарные события, не образующие полной группы событий.

5. Приведите примеры:

а) трех событий, образующих полную группу событий;

б) трех событий, равновозможных и несовместных, но не образующих полную группу событий;

в) двух событий, несовместных и образующих полную группу событий, но не равновозможных.

6. Перечислив все случаи наступления и ненаступления событий, стоящих в левой и правой частях равенств в таблице истинности, доказать следующие равенства:

1) $A + A = A$;

2) $AA = A$;

3) $A + B = B + A$;

4) $AB = BA$;

5) $(AB)C = A(BC)$;

6) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

7) $(A + B)C = AC + BC$;

8) $A + \emptyset = A$;

9) $A\emptyset = \emptyset$;

10) $A\Omega = A$;

11) $A + \Omega = \Omega$;

12) $A + \bar{A} = \Omega$;

13) $\bar{\Omega} = \emptyset$;

14) $\bar{\emptyset} = \Omega$;

15) $A\bar{A} = \emptyset$.

7. Доказать правила де Моргана:

1) $\overline{A + B} = \bar{A}$;

2) $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$.

8. Доказать справедливость следующих тождеств:

1) $AB + C = (A + C)(B + C)$;

2) $A - B = A\bar{B}$;

3) $(A + B) - B = A - AB = A\bar{B} = A - B$;

4) $(A + B)(A + \bar{B}) = A$;

5) $AC - B = AC - BC$;

6) $(A - B) + (A - C) = A - BC$;

7) $\overline{\bar{A} + \bar{B}} = AB$;

8) $\overline{\bar{A}\bar{B}} = AB$;

9) $A\bar{B} + \bar{A}B = (A + B)$.

9. Найти случайное событие X из равенства

$$\overline{X + A} + \overline{X + \bar{A}} = B.$$

10. Производятся три выстрела по мишени. Рассматриваются события: A_1 — попадание в цель первым выстрелом; A_2 — попадание в цель вторым выстрелом; A_3 — попадание в цель третьим выстрелом. Определить, каким событиям равносильны следующие события:

1) $A_1 + A_2 + A_3$;

2) $A_1 A_2 A_3$;

3) $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$;

4) $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$;

5) $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$;

6) $\overline{\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3}$;

7) $A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$;

8) $(\bar{A}_1 + \bar{A}_2) A_3$.

11. Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются события A_i — появление герба при i-м подбрасывании ($i = 1, 2, 3$). Представить в виде сумм, произведений и сумм произведений событий A_i и $\bar{A}_i$ следующие события: A — появились все три герба; B— появились все три цифры; C — появился хотя бы один герб; D — появилась хотя бы одна цифра; E — появился только один герб; F — появилась только одна цифра.

1.2. Вероятность события

Аксиоматическое определение вероятности. Вероятность события — это численная мера объективной возможности его появления. Вероятностной мерой называется числовая функция, определенная на поле событий S и удовлетворяющая следующим трем аксиомам.

1. Каждому событию A ставится в соответствие неотрицательное число p, которое называется вероятностью события A:

$$P(A) = p \geq 0, \text{где } A \in S, S \subseteq \Omega.$$

2. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ несовместны, то верно равенство

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n),$$

где $A_i \in S$ $(i = 1, 2, \dots, n), S \subseteq \Omega$.

3. $P(\Omega) = 1$, где Ω — истинное (достоверное) событие.

Пространство элементарных событий Ω с заданной в нем алгеброй S (или σ-алгеброй) и определенной на S вероятностью — неотрицательной мерой $P(A), A \in S$ называется *вероятностным пространством* и обозначается (Ω, S, P).

Классическое определение вероятности:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}, \tag{1.2.1}$$

где n — общее число элементарных исходов (событий) в опыте или испытании; $m(A)$ — число элементарных исходов (событий), благоприятствующих появлению события A.

$$P(\Omega) = 1, P(\overline{\Omega}) = 0, 0 < P(A) < 1, \tag{1.2.2}$$

где Ω — достоверное событие; $\overline{\Omega}$ — невозможное событие; A — случайное событие.

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.2.3}$$

Статистической вероятностью события A называется число исходов, в которых появилось событие A (m) к общему числу опытов (n):

$$\mu(A) = \frac{m}{n}, 0 \le \mu(A) \le 1. \tag{1.2.4}$$

Если число элементарных исходов бесконечное (непрерывное, имеющее мощность множества континуум), то используют геометрическое определение вероятности.

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}. \tag{1.2.5}$$

Известны и другие подходы к определению вероятности, нашедшие свое применение в экспертных оценках, теории искусственного интеллекта, байесовской статистике. Например, *субъективная вероятность* — степень уверенности субъекта в наступлении события.

Пример 1. (Задача о встрече). Два лица A и B договорились встретиться в определенном месте в промежутке времени от 900 до 1000. Каждый из них приходит наудачу, независимо от другого лица, и ожидает 10 мин. Какова вероятность того, что

а) они встретятся;

б) встреча произойдет во второй половине часа.

Решение. Рассмотрим прямоугольную систему координат XOY, в качестве единиц масштаба выберем часы. Пусть x и y — моменты прихода A и B соответственно. Необходимым и достаточным условием встречи является выполнение неравенства $|y - x| \le 1/6$ или $x - 1/6 \le y \le x + 1/6$.

Тогда все возможные исходы будут являться точками квадрата 1×1:

а) заштрихованной области квадрата, ограниченной сторонами квадрата, а также прямыми $y = x - 1/6$ и $y = x + 1/6$ — событию D, соответствуют исходы, благоприятствующие встрече (рис. 1.1).

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата.

$$P(D) = \frac{1^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}{1^2} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

б) вероятность встречи в первой половине часа — событие E (изобразите графически), будет равна

$$P(E) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}.$$

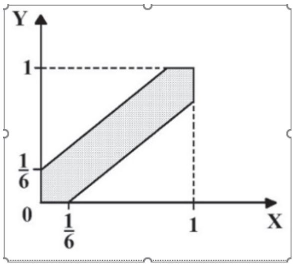


Рис. 1.1 — Событие E вероятность встречи

Тогда вероятность встречи во второй половине часа — $P(\bar{E}) = \frac{11}{36} - \frac{5}{36} = \frac{6}{36}$. Разница между вероятностями событий E и $\bar{E}$ в 1/36 объясняется тем, что A может прийти в первую половину часа, а B — во вторую, или наоборот (B может прийти в первую половину часа, а A — во вторую).

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на обеих костях появится одинаковое число очков;

б) хотя бы на одной кости появится два очка;

в) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение — шести;

г) сумма очков не превосходит 6;

д) произведение числа очков не превосходит 6;

е) произведение очков делится на 6.

2. В урне a белых и b черных шаров. Из урны случайно выбрали шар, он оказался белым. После этого из урны вынули еще один шар. Какова вероятность того, что этот шар тоже белый.

3. Из 100 посаженых семян проросло 78:

а) какова статистическая вероятность прорастания семян;

б) каков процент всхожести семян?

4. Относительная частота (частость) работников предприятия, имеющих высшее образование, равна 0,15. Определить число работников, имеющих высшее образование, если всего на предприятии работает 40 человек.

5. С использованием генератора случайных чисел (например, в пакете анализа *MS Excel*) рассмотреть 100 пятизначных случайных чисел между 0 и 1.

Построить распределение частот встречаемости чисел 0, 1, …, 9 (сравнить с данными закона Бенфорда).

6. (*Случайное блуждание на прямой*.) В точке нуль числовой оси находится частица (подвижная точка). Каждую секунду она с равной вероятностью сдвигается на единицу либо вправо, либо влево. Сколько частица будет на положительной полуоси, если за ней наблюдать 60 с? (Для ответа рекомендуется провести имитационный эксперимент по подбрасыванию монеты — одно подбрасывание эквивалентно движению за 1 с: герб — точка сдвигается влево на единицу, цифра — вправо.)

7. *Вероятность «черной пятницы»*. Доказать, что тринадцатое число месяца с большей вероятностью приходится на пятницу, чем на другие дни недели.

8. В отрезке AB длиной 3 случайно появляется точка C. Определить вероятность того, что расстояние от точки C до точки B превосходит 1.

9. В круг радиуса 5 вписан треугольник наибольшей площади. Определить вероятность попадания в треугольник точки, случайно брошенной в круг.

10. Расстояние от пункта M до пункта N автобус проходит за 2 мин, а пешеход — за 15 мин. Интервал движения автобусов 25 мин. Пешеход в случайный момент времени отправляется из M в N пешком. Найти вероятность того, что его в пути догонит автобус.

11. Какой толщины должна быть монета радиуса r, чтобы вероятность падения на ребро была 1/3.

Указание. Необходимо рассмотреть монету как прямой круговой цилиндр с радиусом основания r, вписанным в шар радиуса R. Монета бросается на клейкую поверхность. (Знаменитый математик фон Нейман, впервые услышав эту задачу, дал ответ с точностью до трех знаков после запятой через 20 с в присутствии публики, которой потребовалось для решения значительно больше времени.)

12. Из отрезка [0, 2] наудачу выбраны два числа x и y. Найдите вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 4y \le 4x$.

13. *Задача Бюффона*. Игла длиной l бросается на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, разделенными расстояниями L ($L > l$). Все положения центра иглы и все ее направления одинаково вероятны. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь из линий.

14. *Парадокс Бертрана.* Для некоторой окружности случайно выбирается хорда. Найти вероятность того, что эта хорда длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность, если:

а) середина хорды равномерно распределена (имеет одинаковую возможность появиться) в круге;

б) направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном направлению;

в) один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности. (Парадокс заключается в том, что вероятности для *а*, *б*, *в* различны.)

15. Стержень длиной l разломан в двух наудачу выбранных точках. С какой вероятностью из полученных отрезков можно составить:

а) треугольник;

б) прямоугольный треугольник?

Решение.

Первый способ[1]. Рассмотрим равносторонний треугольник и построим на основаниях его высот еще один треугольник (ортотреугольник), обладающий целым рядом известных свойств: он обладает наименьшим периметром из всех треугольников, вписанных в данный (задача Фаньяно); сумма высот, опущенных из любой точки большого треугольника на стороны, равна его высоте h (легко показать методом площадей), которую условно можно принять за стержень, рассматриваемый в задаче. Из последнего свойства следует, что для любой точки вне ортотреугольника, например точки *B*, сумма высот для малого треугольника равна его высоте *h*/2.

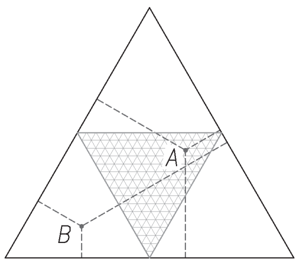


Рис. 1.2 — Иллюстрация к задаче 15

Значит, для большого треугольника сумма двух высот будет меньше *h*/2 (треугольник построить нельзя), если точка будет лежать на стороне ортотреугольника — сумма будет равна *h*/2 (можно построить вырожденный треугольник), и наконец, если точка будет лежать внутри ортотреугольника (например, точка *A*), то сумма высот будет больше *h*/2 и треугольник с периметром h и сторонами, равными перпендикулярам, опущенным на стороны большого треугольника, можно построить. Следовательно, согласно геометрическому определению вероятности вероятность будет равна 1/4.

Второй способ. Положим, что $l = 1$, построим плоскость $x + y + z = 1$ при положительных значениях переменных, область решений и благоприятствующая область будут аналогичны рисунку выше.

Третий способ. Пусть для определенности $l = 1$. Для множества точек квадрата со стороной $(x, y) \in [0; 1]^2$ составим неравенства треугольника при $x > y$ и при $x < y$ и получим ответ.

16. Стержень длиной l наудачу разламывается на две части, после чего большая из частей опять разламывается надвое в наудачу выбранной точке. Найти вероятность того, что из полученных частей можно составить треугольник.

Решение.

Первый способ. (Мартин Гарднер, «Математические головоломки и развлечения», гл. 34). «Примем длину палки за 1 и обозначим через x длину более короткого обломка, получившегося после переламывания палки. Чтобы построить треугольник, мы должны переломить в какой-то точке большой обломок, длина которого составляет $(1 - x)$ единиц. Следовательно, вероятность построить треугольник составляет $x(1 - x)$. Усреднив по x от 0 до 1/2, мы получаем $-1 + +2ln2$, или 0,386».

[1] Гарднер, М. Математические игры и развлечения. — 2-е. изд. — М. : Мир, 1999.

Второй способ (см. пример 4 в разделе 6).

17. На окружности наудачу выбраны три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC будет:

а) остроугольным;

б) тупоугольным;

в) прямоугольным;

г) правильным;

д) равнобедренным.

18. В квадрат наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что они образуют вершины:

а) какого-нибудь треугольника;

б) правильного треугольника;

в) прямоугольного треугольника.

19. (Продолжение задачи о встрече.) Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Лицо A ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит; лицо B ждет другого в течение 20 мин. Чему равна вероятность встречи этих лиц,

а) если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа;

б) если встреча происходит во второй половине часа?

20. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов равновозможно в течение суток. Найдите вероятность того, что одному из пароходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 4 ч, а второго — 6 ч.

21. В интервале времени $[0; T]$ в случайный момент времени u появляется сигнал длительности Δ. Приемник включается в случайный момент времени $v \in [0; T]$ на время t. Найдите вероятность обнаружения сигнала приемником.

22. Даны отрезки длиной 2, 5, 6, 10. Какова вероятность того, что из наудачу взятых трех отрезков можно построить треугольник?

23. Монету с диаметром d бросают на лист бумаги в клетку со стороной a. Какова вероятность того, что монета упадет на линию?

24. Чему равна вероятность того, что наугад выбранное квадратное уравнение $x^2 + 2cx + q = 0$, где точка (c, q) наугад выбрана в квадрате с вершинами $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ имеет корни:

а) вещественные;

б) мнимые;

в) положительные;

г) отрицательные;

д) разных знаков;

е) одного знака.

25. В квадрат с вершинами $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ наудачу брошена точка $M(x, y)$. Найти вероятность следующих событий:

а) $A = \left((x, y) / x^2 + y^2 \le a^2, a > 0\right)$;

б) $B = \left((x, y) / xy \le a, a > 0\right)$;

в) $C = ((x, y)\ |x - y| < a,\ a > 0)$;

г) $C = ((x, y)/\max(x, y) < a,\ a > 0$

д) при условии а): $C = ((x, y)/\max(x, y) < a,\ a > 0)$;

е) при условии а): $D = ((x, y)/\min(x, y) < a,\ 0 \le a \le 1)$.

26. На перекрестке установлен светофор, который отрегулирован так, что 120 с горит красный свет, 30 с зеленый свет. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без осановки?

27. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a наудачу бросается монета диаметра $D < a$. Найти вероятность, того, что:

а) монета попадет целиком внутрь одного квадрата;

б) монета пересечет не более одной стороны одной клетки.

28. На отрезке [–1;2] случайно выбраны две точки. Какова вероятность того, что:

а) их сумма больше 0, а произведение отрицательно,

б) их сумма больше –1, а произведение меньше 1.

1.3. Комбинаторика и классическое определение вероятности

Правило произведения. Пусть из некоторого конечного множества: 1-й объект можно выбрать k_1 способами, 2-й объект — k_2 способами, …, n-й объект — k_n способами. Тогда произвольный набор перечисленных n объектов из данного множества можно выбрать $k_1 k_2 \dots k_n$ способами.

Правило суммы. При выполнении условий правила произведения любой из объектов можно выбрать $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ способами.

Пример 1. В академической учебной группе 10 юношей и 15 девушек. По правилу суммы любого студента можно выбрать $k_1 + k_2 = 10 + 15 = 25$ способами. За одну парту юношу и девушку по правилу произведения можно посадить $k_1 k_2 = 10 \cdot 15 = 150$ способами.

При определении вероятностей событий часто используются формулы комбинаторики, позволяющие подсчитать число различных способов выбора k элементов из n элементного множества по схеме без возвращений и с возвращениями.

1. *Число размещений* из n элементов по k элементов *без возвращений*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1),\ A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.3.1}$$

2. *Число перестановок* из n элементов, каждое из которых содержит все n элементов

$$P_n = A_n^n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \tag{1.3.2}$$

3. *Число сочетаний* из n элементов по k элементов *без возвращений*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.3.3}$$

Различные размещения отличаются друг от друга или порядком, или составом своих элементов. Различные сочетания отличаются друг от друга только составом своих элементов. Перестановки отличаются порядком своих элементов.

Некоторые полезные свойства сочетаний:

$$0! = 1;\ C_n^o = 1;\ C_n^k = C_n^{n-k};\ C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k; C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \text{ — формула бинома Ньютона.} \qquad (1.3.4)$$

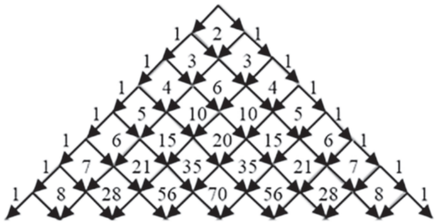


Рис. 1.3 — Граф-решетка, иллюстрирующий число траекторий симметричного случайного блуждания в виде биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля)

4. Число размещений и сочетаний *с возвращениями* определяется по формулам:

$$\overline{A_n^k} = n^k;\ \overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}, \qquad (1.3.5)$$

где $0 \le k \le n$.

5. *Схема упорядоченных разбиений*. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_r$ — целые числа, такие что $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, $k_i \ge 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$. Число способов, которыми множество из *n* элементов можно разделить на r упорядоченных частей (r подмножеств или r групп), из которых первая содержит k_1 элементов, вторая — k_2 элементов и *r*-я — k_r элементов, обозначается $C_n(k_1, k_2, \dots, k_r)$ и вычисляется по формуле

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}. \qquad (1.3.6)$$

Числа (1.3.6) — *полиномиальные коэффициенты,* получаются при разложении полинома

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n.$$

6. Область определения биномиальных коэффициентов можно расширить следующим образом:

$$C_x^m = \binom{x}{m} = \frac{(x)_m}{m!} = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{m!}, \qquad (1.3.7)$$

$$A_n^m = (x)_m = x(x-1)\dots(x-m+1), \qquad (1.3.8)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, а $x \in R$. В частности,

$$\binom{x}{0} = 1, \binom{x}{1} = x, \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}.$$

В этом случае формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^x = \sum_k \binom{x}{k} a^k b^{x-k}, \qquad (1.3.9)$$

может использоваться для дробных и отрицательных степеней (x).

Пример 2. Какова вероятность того, что никакие два человека из n, находящихся в одной комнате, не имеют день рождения в один день года.

Решение. Будем считать, что год невисокосный, т. е. в году 365 дней. Тогда число благоприятствующих исходов $m(A) = A_{365}^n$. Общее число размещений с возвращениями n человек по 365 дням равно $\overline{A_{365}^n}$.

Имеем

$$P(A) = \frac{A_{365}^n}{\overline{A_{365}^n}} = \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}.$$

Используя компьютер (например, MS Excel), оцените, при каком значении n можно заключить пари на равных условиях, что никакие два человека из n не имеют день рождения в один день года.

Пример 3. Колода карт (52 листа) перетасована. Наудачу выбирают 6 карт (без возвращения).

Найти вероятности следующих событий, среди карт:

а) окажется король пик;

б) будут представители всех мастей;

в) будет ровно 5 карт одной масти. Какое наименьшее число карт надо взять из колоды, чтобы с вероятностью 1/2 встретились хотя бы 2 карты одного наименования?

Решение:

а) событие A — в наборе из 6 карт окажется король пик. Вероятность события A можно искать как разность между единицей и вероятностью того, что среди карт нет короля пик:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{51}{52} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{47}{48} \cdot \frac{46}{47} = 1 - \frac{46}{52} = \frac{6}{52} \approx 0{,}11538;$$

б) событие B — будут представители всех мастей:

$$P(B) = \frac{m(B)}{n} = \frac{4 \cdot 13^3 \cdot C_{13}^3 + 6 \cdot 13^2 \cdot (C_{13}^2)^2}{C_{52}^6} = \frac{83\,486}{20\,358\,520} \approx 0{,}4265.$$

Число карт	Общее число наборов	Число исходов
3 карты одной масти, например: 1П + 1Б + 1Т + 3Ч	$C_4^1 = 4$	$4 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^3 = 4 \cdot 13^3 \cdot C_{13}^3$
2 карты одной масти, например: 1П + 1Б + 2Т + 2Ч	$C_4^2 = 6$	$6 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^2 \cdot C_{13}^2 = 6 \cdot 13^2 \cdot (C_{13}^2)^2$

в) событие С — ровно 5 карт одной масти. Рассуждая аналогично пункту б, получим

$$P(C) = \frac{m(C)}{n} = \frac{4 \cdot C_{13}^5 \cdot C_{39}^1}{C_{52}^6} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 39}{47 \cdot 49 \cdot 17 \cdot 52} = \frac{3861}{39\,151} \approx 0{,}0986.$$

Пусть событие D — надо взять из колоды наименьшее число карт, чтобы с вероятностью 1/2 встретились хотя 2 карты одного наименования. Рассмотрим разность между единицей и вероятностью того, что все карты различны.

Для случая пяти карт получим

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 1 \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{44}{50} \cdot \frac{40}{49} \cdot \frac{36}{48} \approx 1 - 0{,}5071 = 0{,}4929.$$

Для случая шести карт получим

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 1 \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{44}{50} \cdot \frac{40}{49} \cdot \frac{36}{48} \cdot \frac{32}{47} =$$

$$= 1 - 0{,}3452 \approx 0{,}6548.$$

Следовательно, необходимо взять 6 карт.

1. В сельскохозяйственном эксперименте проверяют влияние на урожайность трех различных факторов (например, применение удобрений, орошение, срок посева). Факторы имеют соответственно k_1, k_2, k_3 уровней. Сколько существует комбинаций или способов воздействия?

2. Сколько можно образовать различных инициалов, если каждый человек имеет одну фамилию, имя, отчество?

3. В азбуке Морзе буквы представляются последовательностями тире и точек с возможными повторениями. Сколько букв можно составить из 5 и менее символов?

4. Девять запечатанных пакетов с предложениями цены на аренду участков для бурения нефтяных скважин поступили в специальное агентство утренней почтой. Сколько существует различных способов очерёдности вскрытия конвертов с предложениями цены?

5. Компания имеет четыре отдела: производства продукции; снабжения, занимающийся обеспечением сырья; менеджмента; маркетинга. Численность персонала в каждом из отделов составляет 55, 30, 21 и 13 работников соответственно. Каждый отдел собирается послать одного представителя на ежегодную встречу с директором компании. Сколько различных групп для встречи можно составить из числа работников компании?

6. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля:

а) если цифры в коде не повторяются;

б) если цифры в коде повторяются?

7. Директор корпорации рассматривает заявления о приёме на работу 10 выпускников университета. На одном из предприятий корпорации имеются три различные вакансии. Сколькими способами директор может заполнить эти вакансии?

8. Докажите равенства:

а) $\sum_{i=1}^{n} C_n^i = 2^n$;

б) $C_n^k = \sum_{i=k}^{n} C_{i-1}^{k-1} (n \geq k)$;

в) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;

г) $C_{m+n}^l = \sum_{k=0}^l C_n^k C_m^{l-k}$ *(формула свертки Вандермонда)*;

д) $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$;

е) пусть $x = k \in Z_+$.

1) показать, что $(C_m^{-k}) = (-1)^m \binom{m+k-1}{m}$;

2) получить разложение в ряд $\frac{1}{1+t}$, $\frac{1}{(1+t)^2}$, $\frac{1}{(1+t)^3}$ и сравнить коэффициенты полученных членов ряда с числами в треугольнике Паскаля.

9. Имеются две урны. В первой урне 10 красных и 6 черных шаров. Во второй — 4 красных и 6 черных шаров. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что:

а) оба шара будут красными;

б) из первой урны будет вынут красный шар, а из второй — черный;

в) хотя бы один из вынутых шаров черный.

10. Из коробки, содержащей 8 пронумерованных жетонов, вынимают один за другим все находящиеся в ней жетоны и укладывают рядом. Найти вероятность того, что номера вынутых жетонов будут идти по порядку: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

11. Из 5 букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».

12. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

13. На отдельных одинаковых карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все девять карточек перемешивают, после чего наугад берут четыре карточки и раскладывают в ряд в порядке появления. Какова вероятность получить при этом:

а) четное число;

б) число 1234?

14. Какова вероятность, что на трех карточках, вынутых по одной и положенных в порядке их появления, получим число 325, если всего карточек было шесть с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6?

15. Восемь различных книг расставляются наугад на полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

16. Среди изготовленных 15 деталей имеется 5 нестандартных. Определить вероятность того, что взятые наугад три детали окажутся стандартными.

17. В партии готовой продукции из 10 изделий имеется 7 изделий повышенного качества. Наудачу отбираются шесть изделий. Какова вероятность того, что четыре из них будут повышенного качества?

18. Какова вероятность того, что два определенных студента будут посланы на практику в г. Лабинск, если предоставлено 6 мест в г. Лабинске, 10 — в г. Анапе и 4 — в г. Тимашевске?

19. В клетке содержится 18 кур. Из них 6 не вакцинированы. Партию делят на 2 равные части. Какова вероятность того, что невакцинированные куры разделятся поровну?

20. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдут:

а) две женщины и один мужчина;

б) все женщины.

21. Среди 20 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрываются 5 билетов в театр. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся три девушки.

22. Определить вероятность того, что участник лотереи «Спортлото „5 из 36“» угадает правильно:

а) все 5 номеров;

б) 3 номера.

23. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок открывается в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Какова вероятность того, что замок откроется, если установить произвольную комбинацию цифр?

24. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства случайным образом включаются два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

25. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся:

а) одно окрашенное изделие;

б) два окрашенных изделия;

в) хотя бы одно окрашенное изделие.

26. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий i-го сорта равно n_i: $n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $n_3 = 5$, $n_4 = 5$. Для контроля наудачу берутся $m = 10$ изделий. Определить вероятность того, что среди них $m_1 = 2$ первосортных, $m_2 = 3$, $m_3 = 1$ и $m_4 = 4$ — второго, третьего и четвертого сорта соответственно.

27. Среди $n = 100$ лотерейных билетов $k = 5$ выигрышных. Наудачу взяли $m = 10$ билетов. Определить вероятность того, что среди них $l = 2$ выигрышных.

28. В лифт $n = 22$-этажного дома сели $k = 5$ пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что:

а) все вышли на разных этажах;

б) по крайней мере двое сошли на одном этаже.

29. Бросаются 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

30. В ящике 10 белых и 6 черных шаров. Какова вероятность, что вынутые два шара одного цвета.

31. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одного размера. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенной:

а) 1 грань;

б) 2 грани;

в) 3 грани;

г) 0 граней.

32. Десять рукописей разложены по 20 папкам (на одну рукопись приходится две папки). Найти вероятность того, что в 4 случайно отобранных папках не содержится целиком ни одна рукопись.

33. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Если студент не знает ответа на поставленный вопрос, преподаватель задает ему еще один, дополнительный. Зачет ставится, если студент правильно отвечает хотя бы на один вопрос. Какова вероятность получения зачета?

34. Колода игральных карт (52 листа, 4 масти по 13 карт в каждой) тщательно перетасована. Наудачу берут 6 карт (без возвращения).

Описать пространство элементарных исходов, а также найти вероятность того, что среди этих карт:

а) окажется король пик;

б) окажутся представители всех мастей;

в) будет ровно 5 карт одной масти;

г) первым окажется король пик;

д) пятым окажется король пик;

е) окажется ровно 5 картинок и 2 черные карты;

ж) окажутся хотя бы 2 карты пик;

з) окажутся хотя бы 2 красные карты. Какое наименьшее число карт надо взять из колоды, чтобы с вероятностью более 1/2 среди них встретились хотя бы две карты одинакового наименования?

35. В ящике 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что два наудачу вынутые шара будут разного цвета?

36. Найти вероятность получить 12 очков хотя бы один раз при n бросаниях двух игральных костей.

37. В партии, состоящей из N изделий, имеется M бракованных. С какой вероятностью среди n ($n < N$) наудачу выбранных из этой партии изделий окажется m бракованных ($0 \le m < M$)? Не больше m бракованных?

38. Один школьник, желая подшутить над своими товарищами, собрал в гардеробе все пальто, а потом развесил их в случайном порядке. Какова вероятность (p) того, что хотя бы одно пальто попало на прежнее место, если всего в гардеробе n крючков и на них висело n пальто. Найти предел p при $n \to \infty$.

39. Чему равна вероятность того, что при двух бросаниях трех игральных костей получится один и тот же результат, если:

а) кости различны;

б) кости неразличимы?

40. Каждая из n палок разламывается на две части — длинную и короткую. Затем $2n$ обломков случайным образом соединяются в n пар, каждая из которых образует новую «палку». Найти вероятность того, что:

а) части будут соединены в первоначальном порядке;

б) все длинные части будут соединены с короткими.

41. В купейный вагон (9 купе по 4 места) семи пассажирам продано семь билетов. Найти вероятность того, что оказались занятыми:

а) ровно два купе;

б) ровно три купе.

42. Две игральные кости бросают r раз $r \geq 6$. Найти вероятность того, что каждая из шести комбинаций (1, 1), …, (6, 6) появится по меньшей мере один раз.

43. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ наудачу выбирается число a. Найти предел при $n \to \infty$ вероятности того, что $a^2 - 1$ делится на 10.

44. В каждом из следующих четырех случаев размещения n шаров по m ящикам постройте соответствующее пространство элементарных исходов и найдите число элементов в нем, если:

а) шары различимы, в каждом ящике может быть любое число шаров;

б) шары неразличимы, в каждом ящике может быть не более одного шара;

в) шары различимы, в каждом ящике может быть любое число шаров;

г) шары неразличимы, в каждом ящике может быть не более одного шара.

45. (*Задача о совпадении дней рождения*). В аудитории сидят n человек. Найдите вероятность того, что хотя бы у двух из них дни рождения совпадают. При этом для простоты считайте, что в году 365 дней.

46. В комнате *n* человек $(n \leq 12)$. Чему равна вероятность того, что среди них есть по крайней мере два человека, у которых дни рождения приходятся на один и тот же месяц? При каком *n* эта вероятность не меньше половины? Предполагается, что распределения дней рождения по месяцам года равновероятны.

47. Вы задались целью найти человека, день рождения которого совпадает с вашим. Сколько незнакомцев вам придется опросить, чтобы вероятность встречи такого человека была бы не меньше 0,5?

48. Есть две монеты, у которых вероятности выпадения орла при однократном подбрасывании равны p и q соответственно. Андрей подбрасывает первую монету до появления первого орла, Борис делает то же самое со второй монетой. Найдите вероятность того, что:

а) Андрей сделает больше подбрасываний, чем Борис;

б) Андрей и Борис сделают одинаковое число подбрасываний.

49. (*Задача кавалера де Мере.*) Что вероятнее: при бросании четырех игральных костей хотя бы на одной получить единицу или при 24 бросаниях двух костей хотя бы раз получить две единицы?

50. Колоду из 36 карт наудачу разделяют на две половины. Какова вероятность того, что в каждой половине будет одинаковое число красных и черных карт?

51. Шесть шаров случайно разложены по 10 ящикам. Найдите вероятность того, что в первом ящике лежит ровно 2 шара.

52. Наудачу выбирается трехзначное число, в десятичной записи которого нет нуля. Какова вероятность того, что у выбранного числа ровно 2 одинаковые цифры?

53. В коробке находится 20 шаров, имеющих номера от 1 до 20. Случайным образом неупорядоченно и без возвращения выбираются 3 шара. Выигрышной считается ситуация, когда максимальный из номеров выбранных шаров не меньше 17. Найти вероятность выигрыша.

54. Бросаются три игральные кости. Что вероятнее получить в сумме выпавших очков — 11 или 12?

55. Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимаются 3 карты. Какова вероятность, что среди них не окажется ни одного туза?

56. (*Генуэзская лотерея.*) Проводится розыгрыш пяти выигрышных билетов из 90 имеющихся. Все билеты пронумерованы числами от 1 до 90. Участники розыгрыша могут делать ставки: на один номер (простая единица), на два номера (амбо), на три номера (терно), на четыре номера (кватерно), на пять номеров (квинтерно). При этом, если игрок угодал, он получил свою ставку, умноженную на 15 для простой единицы, на 270 для амбо, на 5500 для терно, на 75 000 для кватерно, на 1 000 000 для квинтерно. Пользуясь моделью классической вероятности, найти вероятности таких выигрышей.

57. Игроки бросают по 6 игральных костей. Ставка игрока составляет 10 руб. Если сумма выпавших очков 6 или 36, то игрок получает премию 7800 руб., 7 или 35 очков — 2400 руб., 8 или 34 — 400 руб. А в остальных случаях не получает ничего. Найти вероятности предлагаемых премий.

58. (*Игра в бридж.*) Колода состоит из 52 карт. Четырем игрокам раздают по 13 карт. Какова вероятность того, что у одного из них, например у первого, окажется полная масть?

1.4. Основные теоремы теории вероятностей

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.4.1}$$

Теорема 2. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.4.2}$$

Два события A и B называются *независимыми*, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого (в противном случае события *зависимы*).

Теорема 3. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению их вероятностей:

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{1.4.3}$$

Условной вероятностью события B при условии, что событие A уже произошло, называется число $\frac{P(AB)}{P(A)}$, которое обозначается

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = P(B/A) = P_A(B).$$

Теорема 4. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности наступления события A на условную вероятность события B при условии, что событие A уже произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A). \qquad (1.4.4)$$

Теорема 5. Вероятность произведения n зависимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна произведению последовательных условных вероятностей:

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1A_2 \dots A_{n-1}). \qquad (1.4.5)$$

Теорема 6. Вероятность наступления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна разности между единицей и произведением условных вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \dots, \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2/\bar{A}_1) \dots P(\bar{A}_n/\bar{A}_1\bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-1}). \qquad (1.4.6)$$

Пример 1. Три грани тетраэра окрашены в красный (событие A), синий (событие B) и зеленый (событие C) цвет, а на четвертую грань нанесены все три цвета (событие ABC). Найти вероятности наступления событий AB, BC, AC, ABC и сделать вывод.

Решение. Из условия следует, что $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим вероятности указанных событий:

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

следовательно, события A, B, C попарно независимы; если события A, B, C независимы в совокупности, то

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

что неверно, так как $P(ABC) = \frac{1}{4}$.

Таким образом, попарно независимые события A, B, C зависимы в совокупности.

Пример 2. Гардеробщица выдала сразу номерки владельцам n шляп, повесив их наугад. Какова вероятность того, что хотя бы одно из n лиц, сдавших в гардероб шляпы, получит свою шляпу.

Решение. Пусть событие A_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ означает, что i-й владелец шляпы получит ее обратно, тогда если A — событие, означающее, что хотя бы одно лицо получит свою шляпу, то по определению операции суммы событий получим, что

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i + \dots + A_{n-1} + A_n.$$

Пусть $n = 3$, тогда, используя теорему сложения для совместных событий, получим вероятность наступления события A:

$$\mathrm{P}(A_1 + (A_2 + A_3)) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2 + A_3) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_1(A_2 + A_3)) =$$
$$= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) - \mathrm{P}(A_2A_3) - \mathrm{P}(A_1)(\mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) -$$
$$- \mathrm{P}(A_2A_3)) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) - \mathrm{P}(A_2A_3) -$$
$$- \mathrm{P}(A_1A_2) - \mathrm{P}(A_1A_3) + \mathrm{P}(A_1A_2A_3).$$

Обобщая полученный результат, опираясь на метод математической индукции, можно получить вероятность наступления события A.

Рассмотрим вероятности сумм.

Вероятность $P(A_i) = \frac{1}{n}$, количество таких слагаемых равно $\mathrm{C}_n^1 = \frac{n}{1!}$;

$\mathrm{P}\left(A_iA_j\right) = \frac{1}{n(n-1)}$, количество слагаемых равно $\mathrm{C}_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}$;

$\mathrm{P}\left(A_iA_jA_k\right) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$, количество слагаемых равно $\mathrm{C}_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ и т. д.

Перемножая, получим

$$P(A) = n\frac{1}{n} - \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n(n-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

или

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}.$$

Как известно из курса математического анализа, разложение функции e^x в ряд по формуле Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

при $x = -1$ имеем

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!} + \cdots$$

Следовательно, при $n \to +\infty$

$$P(A) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}6321.$$

Тогда вероятность того, что ни один владелец не получит своей шляпы, будет стремиться к $e^{-1} \approx 0{,}3679$.

Самое интересное, что вероятности почти не зависят от числа шляп, сданных в гардероб. (С использованием *MS Excel* найдите соответствующие вероятности при $n = 2, \dots, 10$ и сделайте вывод.)

1. Докажите, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_1\right) = P(A_1)\cdot P\left(A_2 / A_1\right)\cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2)\ldots P\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

2. Для любых событий A и B доказать, что:

а) $P\,(\bar{A}) = 1 - P\,(A)$;

б) если A B, то $P\,(B/A) = P\,(B) - P(A)$;

в) если A B, то $P\,(A) \leq P(B)$;

г) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

д) $1-P(\bar{A})-P(\overline{B})\leq P(AB)\leq 1$;

е) $P(AB)=1-P(\bar{A})-P(\bar{B})+P(\bar{A}\bar{B})$.

Решение. а) События A и $\bar{A}$ несовместны, а $A\cup\bar{A}=\Omega$. Следовательно, $P(\Omega)=P\left(A\cup\overline{A}\right)=P(A)+P\left(\overline{A}\right)$, откуда вытекает сформулированное равенство.

3. Пусть $P(A_1/A_2)=P(A_1)$. Показать справедливость следующих равенств:

а) $P(\mathrm{A}_1/\bar{A}_2=P(A_1)$;

б) $P(\overline{A}_1/A_2)P(A_1)$;

в) $P(B/A)+P(\overline{B}/A)=1$;

г) $P=(B/A)+P(B/\overline{A})=1$.

4. Доказать формулу сложения для условных вероятностей:

$$P=\left(A\bigcup B/C\right)=P\left(A/C\right)+P\left(B/C\right)-P\left(AB/C\right).$$

5. Доказать, что если $C\subseteq B\subseteq A$, то имеет место равенство

$$P\left(C/A\right)=P\left(C/B\right)P\left(B/A\right).$$

6. Известно, что $P\left(A/B\right)$ может быть представлена как взвешенное среднее вероятностей $P\left(A/BC\right)$ и $P\left(A/B\overline{C}\right)$. Найти соответствующие веса.

7. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 4 очка, если известно, что на второй кости выпало больше очков, чем на первой?

8. Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятности попадания в эти зоны при одном выстреле соответственно равны 0,1, 0,35 и 0,4. Найти вероятность:

а) попадания в первую или третью зоны;

б) промаха по мишени.

9. В колоде 52 карты, одна из четырех мастей объявляется козырной. Какова вероятность, что взятая наудачу карта является тузом или козырем?

10. Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 0,6. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на следующий выстрел по второй мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,3. Определить вероятность поражения второй мишени.

11. В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек. Какова вероятность того, что из вызванных наудачу трех студентов:

а) все три девушки;

б) первые две девушки, третий — юноша;

в) все три юноши?

12. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Выстрелы производятся по одному до первого попадания. Определить вероятность того, что придется производить четвертый выстрел.

13. Вероятность безотказной работы автомобиля равна 0,9. Автомобиль перед выходом на линию осматривается двумя механиками. Вероятность того, что первый механик обнаружит неисправность в автомобиле, равна 0,8, а второй —

0,9. Если хотя бы один механик обнаружит неисправность, то автомобиль отправляется на ремонт. Найти вероятность того, что:

а) автомобиль будет выпущен на линию;

б) автомобиль не будет выпущен на линию.

14. Вероятность одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий равна 0,44. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

15. Из 40 деталей в ящике 5 бракованных. Какова вероятность того, что взятые одновременно две детали не будут бракованными?

16. В коробке 12 карандашей трех цветов, по четыре карандаша каждого цвета. Наудачу вынимают три карандаша. Найти вероятность того, что все карандаши окажутся разного цвета. Решить задачу при условии:

а) карандаши возвращают в коробку;

б) карандаши не возвращают в коробку.

17. Из урны, содержащей четыре красных и шесть черных шаров, вынимают два шара (без возвращения первого). Какова вероятность того, что будут вынуты:

а) два шара черного цвета;

б) красный и черный в любой последовательности;

в) второй шар будет черным;

г) оба шара одного цвета?

18. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Приобретено три билета. Какова вероятность выиграть хотя бы по одному из них?

19. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна 0,6. Производится по одному выстрелу одновременно из трех орудий. Цель будет поражена, если в нее попадут не менее двух орудий. Найти вероятность:

а) поражения цели;

б) промаха одним или двумя орудиями.

20. Слово «машина» составлено из букв разрезной азбуки. Какова вероятность того, что, перемешав все буквы и укладывая их в ряд по одной, получим слово:

а) «машина»;

б) «шина»;

в) «Маша»?

21. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что:

а) два из них совершат покупки;

б) все три совершат покупки;

в) ни один не совершит покупки;

г) по крайней мере два совершат покупки;

д) хотя бы один купит товар.

22. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии — 0,2, на втором — 0,35, на третьем — 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды:

а) на всех предприятиях;

б) только на одном предприятии;

в) хотя бы на одном предприятии.

23. Брошены две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.

24. Два игрока поочередно бросают 2 игральные кости. Выигрывает тот, у которого первым появится в сумме двенадцать очков. Найти вероятность выигрыша для каждого игрока.

25. Через автобусную остановку проходят автобусы семи маршрутов с равной частотой. Пассажир ожидает автобус одного из маршрутов № 1, 5, 7. Какова вероятность, что нужный ему автобус будет одним из первых трех подошедших к остановке?

26. Читатель в поисках нужной книги обходит три библиотеки. Вероятность того, что она имеется в очередной библиотеке, равна 0,3. Что вероятнее — найдет читатель книгу или нет?

27. В денежно-вещевой лотерее на каждые 1000 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Какова вероятность выигрыша хотя бы на один из трех приобретенных билетов?

28. В урне 10 красных, 5 зеленых и 3 черных шара. Определить вероятность того, что взятые наудачу два шара будут:

а) одного цвета;

б) разных цветов.

29. На базу поступило 40 ящиков овощей, из них 30 первого сорта. Наудачу для проверки берут два ящика. Какова вероятность, что:

а) оба содержат овощи первого сорта;

б) разного сорта;

в) одного сорта?

30. Читатель разыскивает книгу в трех библиотеках. Одинаково вероятно, есть или нет в фонде очередной библиотеки книга, и также одинаково вероятно, выдана она или нет. Чему равна вероятность того, что читатель найдет нужную книгу?

31. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично», равна для первого студента 0,7, для второго — 0,6, для третьего — 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»:

а) только одним студентов;

б) двумя студентами;

в) хотя бы одним;

г) ни одним?

32. Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй — 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что:

а) оба студента правильно ответят на вопрос;

б) хотя бы один ответит верно;

в) правильно ответит только первый студент.

33. Студент из 40 экзаменационных вопросов выучил только 30. Каким ему выгоднее зайти на экзамен, первым или вторым?

34. В первой бригаде 6 тракторов, во второй — 9. В каждой бригаде один трактор требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Какова вероятность того, что:

а) оба трактора исправны;

б) один требует ремонта;

в) трактор из второй бригады исправен.

35. На предприятии имеются три автомобиля. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,9, второго — 0,7, третьего — 0,8. Найти вероятности всех возможных значений числа автомобилей, работающих безотказно в течение определенного времени.

36. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,784. Найти вероятность одного промаха при трех выстрелах.

37. В круг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Чему равна вероятность того, что поставленные наудачу внутри круга две точки окажутся внутри заданного прямоугольника?

38. Сколько раз необходимо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0,9 хотя бы один раз выпало не менее четырех очков?

39. Вероятность спортсменом взять в одной попытке высоту 1,8 м равна 0,6, высоту 2 м — 0,2, высоту 2 м 10 см — 0,1. Спортсмен, не взявший предыдущую высоту, выбывает из соревнований. Спортсмену на каждую высоту дается три попытки. Определить вероятность того, что спортсмен закончит соревнования, взяв высоту:

а) 1,8 м;

б) 2 м;

в) 2 м 10 см.

40. В первой урне 5 красных, 3 белых и 2 черных шара. Во второй 3 белых и 2 черных шара. Из первой урны взято 2 шара, а из второй — один. Определить вероятность того, что среди них:

а) все шары одного цвета;

б) все шары разного цвета.

41. Аудиторская фирма размещает рекламу в журнале «Коммерсантъ». По оценкам фирмы, 60% людей, читающих журнал, являются потенциальными клиентами фирмы. Выборочный опрос показал также, что 85% людей, которые читают журнал, помнят о рекламе фирмы, помещенной в конце журнала. Оцените, чему равен процент людей, которые являются потенциальными клиентами фирмы и могут вспомнить ее рекламу?

42. Консультационная фирма получила приглашение для выполнения двух работ от двух международных корпораций. Руководство фирмы оценивает вероятность получения заказа от фирмы A (событие A) равной 0,45. Также, по мнению руководителей фирмы, в случае если фирма заключит договор с компанией A, то с вероятностью 90% компания B даст фирме консультационную работу. С какой вероятностью компания получит оба заказа?

43. Урна содержит $N = 90$ занумерованных шаров лотереи «Русское лото» с номерами от 1 до N. Шары извлекаются по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: A — номера шаров в порядке поступления

образуют последовательность 1, 2, 3, …, N; B — хотя бы один раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения; C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения:

а) определить вероятности событий ABC;

б) найти предельные значения вероятностей событий, если извлекаются все шары из урны, при $N \to +\infty$.

44. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет единица. Известно, что для этого потребовалось четное число бросаний. Найти вероятность того, что единица впервые выпадет при втором бросании.

45. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают одновременно n карт, $n < 52$. Одну их них смотрят — она оказывается королём. После этого её перемешивают с остальными вынутыми картами. Найти вероятность того, что повторный выбор из этих n карт опять даст короля.

46. Доказать, что если события $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ независимы в совокупности, то они и попарно независимы.

Независимость событий

1. Если события A и B статистически независимы, то

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

2. Если события A_i $(i = \overline{1, n})$ заключаются в выборе значения x_i на интервале $[0, a_i]$, то можно говорить о непрерывных случайных величинах x_i (которые рассматриваются далее).

2.1. Максимум из n случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ меньше z тогда и только тогда, когда каждая из них меньше z. Следовательно,

$$P(\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} < z) = P(x_1 < z, x_2 < z, \ldots, x_n < z).$$

Если случайные величины независимы, то

$$P(\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} < z) = P(x_1 < z)P(x_2 < z) \ldots P(x_n < z).$$

2.2. Минимум из n случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не меньше z тогда и только тогда, когда каждая из них не меньше z. Следовательно,

$$P(\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} < z) = 1 - P(\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ge z) =$$
$$= 1 - P(x_1 \ge z, x_2 \ge z, \ldots, x_n \ge z).$$

Если случайные величины независимы, то

$$P(\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} < z) = 1 - P(x_1 \ge z)P(x_2 \ge z) \ldots P(x_n \ge z).$$

47. Докажите, что если события A и B независимы, то независимы и пары событий $(A, \bar{B})$, $(\bar{A}, B)$, $(\bar{A}, \bar{B})$.

Решение. Докажем независимость пары событий
$(\bar{A}, B)$. $B = \Omega B = (A + \bar{A})B = AB + \bar{A}B$, $(AB)(\bar{A}B) = \emptyset$.

Следовательно, события $AB, \bar{A}B$ несовместны, поэтому

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B),$$

откуда в силу независимости событий A и B, $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)\big(1 - P(A)\big) = P(B)P(\bar{A})$. Значит, события A и $\bar{B}$ независимы.

48. В квадрат с вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) наудачу брошена точка $M(X, Y)$. Доказать, что $P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y) = xy$, где $0 \le X, Y \le 1$. При $0 < z < 1$ найдите:

а) $P\ (|x - y| < z)$;

б) $P\ (\min\{x, y\} < z)$;

в) $P((x+y)/2 < z$;

г) $P(xy < z)$;

д) $P(\max\ \{x, y\} < z$;

е) $P((x + 2y) < z$.

Решение. Если события A и B независимы, то $P(AB) = P(A)P(B)$. Так как точка $M(X, Y)$ брошена в квадрат случайно, то ее координаты независимы, отсюда выполняется свойство

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y) = xy,$$

где $0 \le X, Y \le 1$.

$$P(|x - y| < z) = P(x - z < y < x + z) = 1 - (1 - z)^2,$$

(неравенство $x - z < y < x + z$ представить графически).

49. Точка $M = (x, y)$ выбрана наудачу в квадрате $[0,1]^2$.

Определим три события равенства:

$$A = \left\{x \le \frac{1}{2}\right\}, B = \left\{y \le \frac{1}{2}\right\} \text{ и } C\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \le 0\right\}.$$

Проверить, зависимы или нет события:

а) в совокупности;

б) попарно.

51. Брошены три игральные кости. Событие A состоит в том, что одинаковое число очков выпало на первой и второй костях, событие B — одинаковое число очков на второй и третьей костях, а C — на первой и третьей. Проверить, зависимы или нет события A, B и C:

а) в совокупности;

б) попарно.

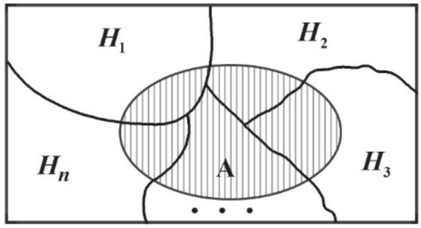
1.5. Формулы полной вероятности и вероятности гипотез

Пусть событие A может наступать вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$, образующих полную группу $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$ (рис. 1.4), тогда вероятность события A определяется по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i), \tag{1.5.1}$$

где события $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$ — гипотезы, а $P(A / H_i)$ — условная вероятность наступления события A при наступлении i-й гипотезы ($i = 1, 2, \dots, n$).

Рис. 1.4 — Полная группа событий



Условная вероятность осуществления гипотезы H_i при условии того, что событие A произошло, определяется по формуле вероятности гипотез или по *формуле Байеса* (она позволяет пересмотреть вероятности гипотез после наступления события A):

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}, \qquad (1.5.2)$$

где $\mathrm{P}(H_i)$ — *априорные вероятности* гипотез H_i; $P(H_i / A)$ — *апостериорные вероятности* гипотез H_i $(i = 1, 2, \dots, n)$;

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1, \sum_{i=1}^{n} P(H_i / A) = 1.$$

Пример 1. Имеются две урны, первая содержит три черных и один белый шар, а вторая — один черный и три белых шара. Наудачу выбирается урна и из неё последовательно выбираются два шара. Какова вероятность того, что второй шар белый. Если шар белый, то какова вероятность, что выбрали вторую урну.

Решение. Событие A — выбранный шар белый; гипотеза H_1 — выбрана первая урна, H_2 — выбрана вторая урна. Логические возможности выбора и соответствующее вероятностное дерево представлены на рисунке 1.5.

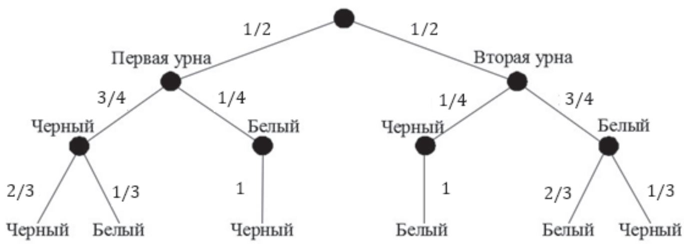


Рис. 1.5 — Вероятностное дерево

Согласно формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2),$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Значит, вероятность того, что второй шар белый, равна 0,5. Если второй выбранный шар белый, то согласно формуле Байеса вероятность того, что была выбрана вторая урна, составит:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{9 / 24}{1 / 2} = 3 / 4.$$

1. Пространство событий Ω состоит их семи квадратов (рис. 1.6). Подмножества пространства событий Ω — события A и B. Найти вероятности событий $P(A/B)$ и $P(B/A)$ по определению вероятности события и формуле Байеса.

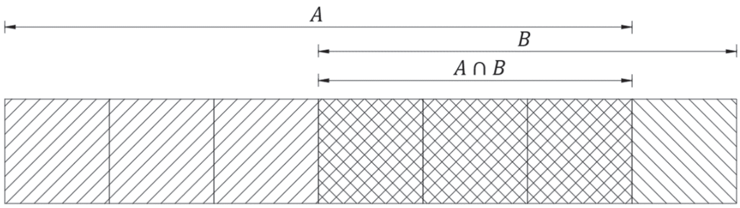


Рис. 1.6 — Иллюстрация теоремы Байеса

2. При исследовании жирности молока коров все стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 70%, во второй — 23% коров. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной коровы, имеет не менее 4% жирности, для каждой группы коров соответственно равна 0,6, 0,35 и 0,1. Определить вероятность того, что для взятой наудачу коровы жирность молока составит не менее 4%. Взятая наудачу корова дает молоко жирностью не менее 4%. Найти вероятность того, что эта корова из первой группы.

3. В первой урне 10 деталей, из них 8 стандартных. Во второй — 6 деталей, из которых 5 стандартных. Из второй урны переложили в первую одну деталь. Какова вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второй урны, нестандартная?

4. Имеются две урны. В первой — семь красных шаров и три черных, во второй — три красных и четыре черных. Из первой урны переложили во вторую один шар, затем, перемешав шары, из второй урны переложили в первую один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первой урны, окажется красным.

5. Перед посевом 90% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения вредителями для растений из обработанных семян равна 0,08, для растений из необработанных семян — 0,4. Взятое наудачу растение оказалось пораженным. Какова вероятность того, что оно выращено из партии обработанных семян?

6. В районе 24 человека обучаются на заочном факультете института, из них 6 — на мехфаке, 12 — на агрофаке и 6 — на экономфаке. Вероятность успешно сдать экзамены на предстоящей сессии для студентов мехфака равна 0,6, агрофака — 0,76 и экономфака — 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый студент, успешно сдавший экзамены, окажется студентом экономфака.

7. В первом ящике из 20 деталей 4 бракованные, во втором из 30 деталей 5 бракованных. Из первого во второй переложили две детали. Найти вероятность того, что деталь, извлеченная после этого из второго ящика, бракованная.

8. Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых 8 пристрелянных, две — нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки равна

0,6, а из непристрелянной — 0,4. Стрелок поразил цель. Какова вероятность того, что он стрелял из пристрелянной винтовки?

9. Для посева заготовлены семена 4 сортов пшеницы. Причем, 20% всех семян 1-го сорта, 30% — 2-го сорта, 10% — 3-го сорта и 40% — 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зерен, для 1-го сорта равна 0,5, для 2-го — 0,3, для 3-го — 0,2, для 4-го — 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зерен.

10. Из 25 студентов группы 5 студентов знают все 30 вопросов программы, 10 студентов выучили по 25 вопросов, 7 студентов — по 20 вопросов, трое — по 10 вопросов. Случайно вызванный студент ответил на два заданных вопроса. Какова вероятность того, что он из тех трех студентов, которые подготовили только по 10 вопросов.

11. Запасная деталь может находиться в одной из трех партий с вероятностями $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}3$. Вероятности того, что деталь проработает положенное время без ремонта, равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Определить вероятность того, что:

а) взятая наудачу деталь проработает положенное время;

б) деталь, проработавшая положенное время, взята из второй или третьей партии.

12. Имеется 5 урн. В первой, второй и третьей находится по 4 белых и 6 черных шаров, в четвертой и пятой урнах — по 2 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что была выбрана четвертая или пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?

13. В первой бригаде производится в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной, для первой бригады равна 0,7, для второй — 0,8:

1) определить вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной;

2) взятая наугад единица продукции оказалась стандартной. Какова вероятность, что она из второй бригады?

14. Покупатель с равной вероятностью посещает 3 магазина. Вероятность того, что он купит товар в первом магазине, равна 0,4, во втором — 0,3, в третьем — 0,2. Определить вероятность того, что покупатель купит товар. Какова вероятность, что он купил товар во втором или третьем магазине?

15. Вероятность того, что клиент банка не вернёт заём в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса — 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?

16. Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на «хорошую», «посредственную» и «плохую» и оценивает их вероятности для данного момента времени как 0,15, 0,70 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает: с вероятностью 0,6, когда ситуация «хорошая»; с вероятностью 0,3, когда ситуация «посредственная»; с вероятностью 0,1, когда ситуация «плохая». Пусть в настоящий момент индекс

экономического состояния изменился. Какова вероятность того, что экономика страны на подъёме?

17. На рынке кофемашин покупатель хочет купить одну кофемашину, а продавец продать кофемашину. Есть два типа кофемашин: высокого (A) и низкого (B) качества. Вероятность отказа машин высокого качества за определенный период времени составляет 0,2, а низкого — 0,75. Если кофемашина работает без сбоев, то полезность для покупателя 400 у. е., сбой уменьшает полезность до 200 у. е. Известно, что 25% кофемашин реализуется высокого качества. Какую кофемашину следует выбрать покупателю?

18. Согласно исследованиям аппаратных сбоев компьютерной компании *ABC*, на одном миллионе компьютеров в течение более 30 сут работы *CPU* имеет вероятность сбоя 0,02. Если сбой произошел, то вероятность повторного сбоя каждые 5 сут равна 0,3. Если сбоя в первые 30 сут не было, то вероятность сбоя 0,01 каждые 10 сут. Определить вероятность сбоя произвольного компьютера за 60 сут. Если компьютер работает без сбоя через 60 сут, то какова вероятность того, что у него не было сбоя в первые 30 сут.

19. (*Задача Монти Холла.*) Монти Холл вел известное шоу, в котором указывал на три двери и говорил, что за одной из них находится автомобиль, а за другими — менее ценные призы. Предлагалось угадать нужную дверь и выиграть главный приз. Прежде чем открыть выбранную участником шоу дверь, Монти увеличивал неопределенность, открывая одну из двух оставшихся дверей, за которой не было автомобиля. Следует ли участнику шоу остановиться на выбранной двери или указать на дверь, оставшуюся закрытой?

20. (*Задача о поездах.*) На железной дороге N поездов с номерами 1, 2, ..., N. Сколько поездов на железной дороге, если:

а) однажды вам встретился поезд с номером 60;

б) вы повстречали 5 поездов, причем номер 60 по-прежему наибольший? (*Указание.* Использовать принцип симметрии: при бросании n точек наудачу на отрезок, распределение длин $(n+1)$ получающихся при этом отрезков одинаково.)

21. (*Задача о танках.*) В годы Второй мировой войны союзниками была захвачена техническая документация, связанная с ремонтом танков. Проведенный анализ серийных номеров в каждой типичной группе танков показал, что в последовательности из 100 номеров наблюдаются пропуски. Поэтому внутри каждой группы задачу можно свести к задаче о поездах. Аналитики того времени, опираясь на эти данные, смогли дать более точную экономическую оценку производства техники (танков, машин, шин и т. д.), чем по данным из других источников.

22. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынимаются наудачу два шара и перекладываются во вторую урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

23. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Если студент не знает ответа на поставленный вопрос, преподаватель задает ему еще один, дополнительный. Зачет ставится, если студент правильно отвечает хотя бы на один вопрос. Какова вероятность получения зачета?

24. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: АААА, ВВВВ, СССС, причем априорные вероятности каждой из после-

довательностей есть соответственно 3/10, 2/5 и 3/10. Известно, что под действием шумов вероятность правильного приема каждой из переданных букв равна 3/5, а вероятности перевода каждой буквы в любую другую одинаковы и равны 1/5. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность АААА, если на приемном устройстве получена последовательность АВСА.

25. Пусть некоторое насекомое откладывает r яиц с вероятностью $\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$. Вероятность развития насекомого из яйца равна p. Предполагая взаимную независимость развития насекомых из яиц, найти вероятность появления k новых насекомых из одной кладки яиц.

26. Пусть количество потомков некоторого насекомого случайно и имеет геометрическое распределение с параметром p. Каждый потомок с равной вероятностью может оказаться мужского или женского пола. Найти вероятность того, что в потомстве будет k самцов.

Указание. Воспользоваться равенством

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}.$$

27. Считая, что при размножении бактерий делением (на две бактерии) вероятность бактерии разделиться за промежуток времени Δ равна $\lambda\Delta + o(\Delta)$ при $\Delta \to 0$ и не зависит от числа предшествующих делений, а также от числа имеющихся бактерий, найти вероятность того, что если в момент времени 0 была одна бактерия, то в момент времени t окажется k бактерий.

28. С использованием азбуки Морзе передается сообщение, состоящее из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если:

а) принят сигнал «точка»;

б) принят сигнал «тире».

29. В коробке лежат 12 новых и 4 уже использовавшихся теннисных мяча. Для первой игры из коробки извлекли случайным образом 3 мяча:

а) найдите вероятность того, что все 3 мяча новые;

б) после первой игры мячи вернули в коробку и позже снова извлекли 3 мяча случайным образом для второй игры.

Найдите вероятность того, что и на этот раз все 3 мяча новые.

30. Предприятие получает еженедельную партию, состоящую из 10 000 микросхем, от одного из двух своих поставщиков. Процент брака у первого поставщика равен 15%, у второго — 25%. При этом первый поставщик обеспечивает 60% потребностей предприятия, второй — 40%. При получении очередной партии были утеряны документы с именем поставщика. Из 10 наугад выбранных микросхем 2 оказались бракованными. От какого поставщика более вероятно получена эта партия микросхем?

31. Трое охотников одновременно выстрелили в волка, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что волк был убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2, 0,4, 0,6.

32. В коробке лежат три монеты. Одна правильная, у второй на обеих сторонах орел, третья монета смещенная: вероятность выпадения орла при однократном подбрасывании равна 0,75. Из коробки случайно выбирается монета и подбрасывается. Выпадает орел. Чему равна вероятность того, что это монета:

а) правильная;

б) с двумя орлами;

в) смещенная?

33. Два игрока независимо друг от друга бросают правильную монету по n раз. Найдите вероятность того, что у обоих выпадет одинаковое число орлов. Оцените порядок изменения этой вероятности по n при $n \to \infty$.

34. Студент на переэкзаменовке пишет экзамен, длительность которого равна 1 ч. Вероятность того, что студент завершит экзамен менее чем за x ч, равна $x/2$, $0 \leq x \leq 1$. Известно, что по истечении 0,75 ч студент продолжал работать. Чему равна вероятность того, что студент использует полностью весь час для экзамена?

35. Курс по финансовой математике посещают 4 юноши и 6 девушек третьего года обучения и юношей четвертого года обучения. Сколько в этой группе должно быть девушек четвертого года обучения, чтобы для случайно выбранного студента этой группы пол и год обучения были независимы?

2. Повторные независимые испытания

2.1. Схема Бернулли

1. *Постоянные условия опыта*. Пусть опыт повторяется в неизменных условиях n раз. В i-м опыте $(i = \overline{1, n})$ событие A может наступить с вероятностью $P(A) = p$ и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$ (схема Бернулли). Вероятность того, что это событие наступит в n испытаниях ровно k раз, вычисляется по формуле Бернулли $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \qquad (2.1.1)$$

Наивероятнейшее число появления события A в повторных независимых испытаниях (k_o) определяется из неравенства

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \qquad (2.1.2)$$

Вероятность появления m неудач до получения k успехов будет равна

$$P_{m+k}(k, m) = C_{m+k-1}^m p^k q^m, (m = 0, 1, 2, \dots). \qquad (2.1.3)$$

2. *Переменные условия опыта*. Если $P(A_i) = p_i$ в каждом из i $(i = \overline{1, n})$ независимых испытаний, то вероятность наступления события A k раз в n испытаниях определяется как коэффициент при k-й степени полинома:

$$\varphi(Z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i Z) = a_n Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z^1 + a_0, \qquad (2.1.4)$$

где $\varphi_{\boldsymbol{n}}(Z)$ — *производящая функция.*

3. *Опыт с несколькими исходами*. Если в результате опыта может появиться одно из несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_к$, где $P(A_i) = p_i$, $(\sum_{i=1}^{r} p_i = 1)$, то вероятность того, что в n опытах появится событие $A_1 - k_1$ раз, $A_2 - k_2$ раза, …, $A_r - k_r$ раз $(\sum_{i=1}^{r} k_i = n$) определяется по формуле

$$P_n(k_1, k_1, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}. \qquad (2.1.5)$$

Пример 1. Найти π_n — вероятность нечетного числа успехов в схеме из n испытаний Бернулли.

Решение. Вероятность четного числа успехов в схеме Бернулли можно записать как

$$\pi_n = \sum\nolimits_{k_{\text{чет}}} P_n(k) = \sum\nolimits_{k_{\text{чет}}} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Запишем два тождества:

$$(q-p)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum\nolimits_{k_{\text{чет}}} C_n^k p^k q^{n-k} - \sum\nolimits_{k_{\text{нечет}}} C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (2.1.6)$$

$$1 = (q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum\nolimits_{k_{\text{чет}}} C_n^k p^k q^{n-k} + \sum\nolimits_{k_{\text{нечет}}} C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (2.1.7)$$

Складывая равенства (2.1.6) и (2.1.7), получим

$$1 + (q-p)^n = 2\sum\nolimits_{k_{\text{чет}}} C_n^k p^k q^{n-k} = 2\pi_n,$$

откуда $\pi_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(q-p)^n$ — вероятность появления четного числа успехов в схеме Бернулли, откуда $1 - \pi_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(q-p)^n$ — вероятность появления нечетного числа успехов.

1. В семье пять детей. Считая вероятности рождений мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что среди этих детей:

а) два мальчика;

б) не более двух мальчиков;

в) более двух мальчиков;

г) не менее двух и не более трех мальчиков.

2. Всхожесть клубней картофеля равна 80%. Сколько нужно посадить клубней, чтобы наивероятнейшее число взошедших из них было равно 100?

3. Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадения 6 очков было равно 50?

4. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть для каждого из них:

а) одну партию из двух или две из четырех;

б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти.

Ничьи во внимание не принимаются.

5. Вероятность появления события *А* в каждом из 6 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие *А* наступит хотя бы в одном испытании.

6. Событие A появится в случае, если событие B наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события A, если будет произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события B равна 0,8.

7. Два стрелка производят по n выстрелов, причём каждый стреляет по своей мишени. Определить вероятность того, что у них будет по одинаковому числу попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,5.

8. Торговый агент в среднем контактирует с восемью потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенциальный покупатель совершит покупку, равна 0,1. Чему равна для агента вероятность в течение одного дня:

а) двух продаж;

б) хотя бы двух продаж;

в) не совершить продаж?

9. Фирма предлагает в продажу со склада партию из 10 компьютеров, 4 из которых с дефектами. Покупатель приобретает 5 из них, не зная о возможных дефектах. Чему равна вероятность того, что все 5 компьютеров окажутся без дефектов?

10. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадает 5 раз. Определить вероятность того, что цифра выпадает 7 раз.

11. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,01. Куплено 100 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

12. На каждый лотерейный билет с вероятностью $p_1 = 0{,}0001$ может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью $p_2 = 0{,}01$ — мелкий выигрыш и с вероятностью p_3 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 15 билетов. Определить вероятность получения 2 крупных выигрышей и 5 мелких.

13. (*Парадокс шевалье де Мере.*) Что вероятнее: при бросании четырех игральных костей хотя бы на одной получить единицу или при 24 бросаниях двух костей хотя бы один раз получить две единицы?

14. Два стрелка одновременно делают выстрелы по мишени. Сколько нужно произвести залпов, если наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, равно 8, причем вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, а для второго — 0,8?

15. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника:

а) 3 партии из 4 или 5 из 8;

б) не менее 3 партий из 4 или не менее 5 из 8;

в) не более n из $2n$ партий или более n из $2n$ партий;

г) не более n из $2n + 1$ партий или более n из $2n + 1$ партий?

16. *Задача С. Банаха о спичечных коробках*:

а) некий математик носит с собой два коробка спичек, в каждом из которых первоначально было по N спичек. Когда ему нужна спичка, он выбирает наугад один из коробков. Найти вероятность того, что, когда математик вытащит в первый раз пустой коробок, в другом будет r спичек.

б) некто носит с собой два коробка спичек A и B, в которых первоначально было M и N спичек соответственно. Когда ему нужна спичка, он берет её из коробка A с вероятность p или из коробка B с вероятностью $1-p$. Найти вероятность того, что, когда математик вытащит в первый раз пустой коробок, в другом будет r спичек.

17. Монету бросают до тех пор, пока герб не выпадет m раз. Найти вероятность того, что опыт закончится при n-м бросании, если:

а) монета симметричная;

б) монета несимметричная, т. е. если вероятность выпадения герба равна $p \neq 1/2$.

18. Два шахматиста A и B согласились сыграть матч на следующих условиях: A должен для победы набрать 12 очков (выигрыш — очко), B должен набрать 6 очков, причем ничьи не учитываются. A обычно вдвое чаще выигрывает у B, если вероятность его выигрыша можно принять равной 2/3. Игру пришлось прикратить после того, как A набрал 8 очков, а B набрал 4 очка. Победу решено присудить тому, у кого вероятность окончательного выигрыша больше. Кто победитель?

19. Бросаются 12 игральных костей. Найти вероятность того, что каждая грань выпадет два раза.

20. В одном учебном заведении обучаются 730 студентов. День рождения наудачу выбранного студента приходится на определенный день года с вероятностью 1/365 для каждого из 365 дней. Найти:

а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января;

б) вероятность того, что найдутся три студента, имеющие один и тот же день рождения.

21. (*Распределение шаров по ящикам*.) Имеется n шаров, которые случайным образом разбрасываются по ящикам. В одном ящике может находиться любое количество шаров. Найти вероятность того, что в первый ящик попадут k_1 шаров, во второй — k_2 шаров и т. д., в r-й — k_r шаров. Если известно, что $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

22. Группа, состоящая из $2n$ мальчиков и $2n$ девочек, делится случайным образом на две составные части. Найти вероятность того, что число мальчиков и девочек одинаково. Вычислить эту вероятность, используя формулу Стирлинга $\left(n! \approx \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$.

2.2. Приближенные формулы в схеме Бернулли

Локальная формула Муавра — Лапласа. Если выполняются условия схемы Бернулли (см. раздел 2.1), то при достаточно большом числе испытаний (вероятности, отличной от 0 и 1, $npq \geq 10$) формулу Бернулли можно приближенно представить в виде

$$P_n(k) \approx C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (2.2.1)$$

где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$; $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Фомула Пуссона. Если в схеме Бернулли число опытов велико, а вероятность появления события *А* мала ($p \to 0, npq < 10$), то формулу Бернули можно приближенно представить в виде

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (2.2.2)$$

где $\lambda = np$.

Интегральная формула Муавра — Лапласа. Если вероятность наступления события *А* в каждом из n независимых испытаний постоянна, отлична от нуля и единицы ($0 < p < 1$), а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что в *n* испытаниях событие *А* произойдет от k_1 до k_2 раз, определяется по формуле

$$P_n(k_1 < k < k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_2), \qquad (2.2.3)$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)$ — функция Лапласа.

Вероятность абсолютного отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях на величину не более чем $\varepsilon >$ > 0 определяется по формуле

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (2.2.4)$$

Замечание. Таблицы значений функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ находятся в приложении 1.

1. Вероятность того, что при сортировке изделий одно из них будет разбито, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 200 изделий окажутся разбитыми:

а) три изделия;

б) не более двух;

в) не менее двух изделий.

2. Станок-автомат делает детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

3. Установлено, что виноградник поражен вредителями в среднем на 10%. Определить вероятность того, что из 10 проверенных кустов винограда один будет поражен. Вычислить вероятности по формулам Бернулли, Лапласа, Пуассона. Сравнить результаты, сделать выводы.

4. На факультете 900 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна 1/365. Найти вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.

5. Вероятность получения отличной оценки на экзамене равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отличных оценок и вероятность этого числа, если сдают экзамен 50 студентов.

6. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты правильно сработает, равна 0,99. Найти наиболее вероятное число случаев неправильной работы автомата и вероятность этого числа случаев, если будет опущено 200 монет.

7. Численность работников предприятия составляет 500 человек. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для каждого работника предприятия. Определить вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников.

8. В пчелиной семье 5000 пчел. Вероятность заболевания в течение дня равна 0,001 для каждой пчелы. Найти вероятность того, что в течение дня заболеет более чем одна пчела.

9. Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет:

а) не менее 70;

б) от 65 до 90 человек.

10. Всхожесть семян составляет 80%. Какова вероятность того, что из 1000 посеянных семян взойдут от 650 до 760?

11. Найти такое число k, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что среди 900 новорожденных более k мальчиков, если вероятность рождения мальчика 0,515.

12. В автопарке 70 машин. Вероятность поломки машины равна 0,2. Найти наивероятнейшее число исправных автомобилей и вероятность этого числа.

13. Всхожесть зерна, хранящегося на складе, равна 80%. Какова вероятность того, что среди 100 зерен:

а) число всхожих составит от 68 до 90 шт.;

б) доля (частость) всхожих зерен будет отличаться от вероятности 0,8 по абсолютной величине не более чем на 0,1?

14. При проведении некоторого опыта вероятность появления ожидаемого результата равна 0,01. Сколько раз нужно провести опыт, чтобы с вероятностью 0,5 можно было бы ожидать хотя бы одного появления этого результата?

15. В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. С вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля безотказно работавших машин в определенный момент времени.

16. Всхожесть зерна равна 90%. Определить вероятность того, что для отобранных случайным образом 100 зерен относительная частота всхожести по абсолютной величине будет отличаться от вероятности взойти $p = 0{,}9$ не более чем на 0,1.

17. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности 0,8 не превысила ε.

18. Отдел контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. С вероятностью 0,9544 найти границы, в которых будет заключено число стандартных деталей.

19. Известно, что 10% делянок под овощами плохо обработаны. Сколько нужно проверить делянок, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что относительная частота засоренных делянок будет отличаться от вероятности засоренности по модулю не более чем на 0,01?

20. Для определения степени поражения винограда вредителями было обследовано 400 кустов. Вероятность поражения куста виноградника равна 0,03. Определить границы, в которых с вероятностью 0,9545 будет заключено число кустов, не пораженных вредителями.

21. Проверяется всхожесть кукурузы. Сколько семян необходимо посеять с вероятностью всхожести 0,99, чтобы относительная частота всхожести отличалась от 0,95 меньше чем на 0,01?

22. Вероятность того, что человек в период страхования будет травмирован, равна 0,006. Компанией застраховано 1000 человек. Годовой взнос с человека составляет 150 руб. В случае получения травмы застраховавшийся получает 12 000 руб. Какова вероятность того, что выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?

23. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0,515. Какова вероятность, что среди 10 000 новорожденных мальчиков будет не больше, чем девочек?

24. Книга из 500 страниц содержит 50 отпечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее 3 опечаток.

25. Сколько изюминок в среднем должны содержать калорийные булочки для того, чтобы вероятность наличия в булочке хотя бы одной изюминки была не менее 0,99?

26. Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 1/2 сумма выпавших очков превысила 100?

27. ВЦИОМ опросил 1500 человек, 7% из них сказали, что на предстоящих выборах в Госдуму будут голосовать за «Партию жизни». Укажите интервал, который с вероятностью 0,95 будет содержать долю голосов, поданных за «Партию жизни» на всеобщих выборах.

28. У неправильной монеты вероятность выпадения орла равна 0,3. Монета подбрасывается 400 раз. Пусть X — число выпадений орла. Оцените вероятность $P(100 \leq X \leq 140)$.

29. Сколько людей надо опросить, чтобы с уровнем доверия 95% определить с точностью 0,005 долю населения, голосующего за партию любителей статистики?

30. При изготовлении микросхем получается 20% дефектных. Какой объем выпуска микросхем необходимо запланировать, чтобы с вероятностью не менее 0,95 реализовать программу, для выполнения которой требуется 50 бездефектных микросхем?

31. Правильный игральный кубик подбрасывается до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превзойдёт 300. Оцените вероятность того, что потребуется не менее 80 подбрасываний.

32. В каждой партии некоторой игры игрок с вероятностью 0,7 проигрывает 1 руб., с вероятностью 0,2 — 2 руб. и с вероятностью 0,1 выигрывает 10 руб. Оцените вероятность того, что после 150 независимых партий:

а) игрок суммарно окажется в проигрыше;

б) игрок выигрывает суммарно не менее 40 руб.

3. Дискретные случайные величины

Случайной величиной называют такую величину, которая в результате опыта может принимать те или иные значения, причем до опыта мы не можем сказать, какое именно значение она примет. Случайные величины обозначаются последними буквами латинского алфавита — X, Y, Z, а их возможные значения — x, y, z. (Более точно, случайная величина — это действительная функция, определенная на пространстве элементарных событий.)

$$\Omega: X = X(\omega), Y = Y(\omega), Z = Z(\omega)).$$

Случайные величины могут быть трех типов:

— дискретные, принимающие конечное или счетное число значений;

— непрерывные, принимающие значения на некотором непрерывном промежутке;

— смешанные (дискретно-непрерывные).

Дискретная случайная величина может принимать конечное или бесконечное счетное число значений и представляться в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Многоугольник распределения — фигура, состоящая из точек (x_i, p_i), соединённых отрезками.

Характеристики центральной тенденции распределения: мода, медиана, математическое ожидание. Характеристики рассеяния относительно математического ожидания: дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание: $M(X) = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

1) $M(C) = C$, где $C = const$.

2) $M(CX) = CM(X)$.

3) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

4) $M(XY) = M(X)M(Y)$ (X и Y независимы).

Мода $M_0(X)$ распределения: $M_0(X) = argmax P(x)$.

Медиана $Me(X)$: $P(x < Me) = P(X > Me)$.

Дисперсия: $D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\big(x_i - M(X)\big)^2 p_i$.

1) $D(C) = 0$, где $C = const$.

2) $D(CX) = C^2 D(X)$.

3) $D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2$.

4) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2cov(X, Y)$,

где $cov(X, Y) = M((X - M(X))((Y - M(Y)))$ — ковариация случайных величин X и Y. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

5) Для независимых случайных величин X и Y:

$$D(X\,Y) = D(X)D(Y) + m_x^2 D(Y) + m_y^2 D(X).$$

Если случайные величины X и Y независимы, то

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Для неотрицательных целочисленных независимых случайных величин X и Y распределение их суммы определяется как *свертка их вероятностей:*

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)\, P(Y = l - k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k)\, P(X = l - k).$$

Основные законы распределения дискретных случайных величин.

Тип распределения и обозначение	Параметры	Возможные значения X	Вероятность $P(X = k)$
Бернулли, $Bern(p)$	p	$k \in \{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$
Биномиальное, $Bin\ (n, p)$	n, p	$k \in \{0, \dots, n\}$	$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$
Пуассона, $Po(\lambda)$	λ	$\{0, \dots, k, \dots\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
Полиномиальное (мультиномиальое), $Mult(n; p)$	$n = k_1 + \dots + k_r$, $p = (p_1, \dots, p_r)$, $\sum p_i = 1$	$k_i \in \{0, \dots, n\}$, $\sum k_i = n$, $i = \overline{1, r}$	$\frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_2}$
Гипергеометрическое, $Hyp(N, m, n)$	$M \le N, m \le n$	$m = m_0, \dots, min(M, n)$, где $m_0 =$ $= \max\{0, n - (N - M)\}$	$P(X = m) =$ $= \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$
Геометрическое, $Geo(p)$	p	$\{0, \dots, m, \dots\}$	$P(X = m) = pq^m$
Отрицательное биномиальное $NBin\ (k, p)$	k, p	$\{0, \dots, m, \dots\}$	$P(X = m) =$ $= C_{m+k-1}^m p^k q^m$

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для законов распределения дискретных случайных величин:

а) Бернулли;

б) биномиального;

в) геометрического;

г) геометрического +1;

д) отрицательного биномиального;

е) гипергеометрического;

ж) Пуассона.

2. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение одинаково распределенных, независимых дискретных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$: $M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n) = M(X)$,

$$D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_n) = D(X).$$

3. Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение определенного времени равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X — числа комбайнов, работавших безотказно. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

4. Вероятность рождения в семье мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X — числа мальчиков в семьях, имеющих четырех детей. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

5. Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине, 0,4. Составить закон распределения случайной величины X — числа покупателей, совершивших покупку, если магазин посетили 3 покупателя. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

6. Монета бросается 10 раз. Составить закон распределения дискретной случайной величины X — числа появлений герба, и представить его аналитически в виде таблицы и многоугольника распределения.

7. В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 3 спортсменов. Составить закон распределения случайной величины X — числа мастеров спорта из отобранных спортсменов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

8. В группе, состоящей из $(2N + 1)$ студентов, N девушек. Составить закон распределения случайной величины X — числа девушек из случайно отобранных трех студентов (N — номер студента в группе).

9. В партии из $(N + 5)$ изделий $(N + 1)$ изделие высокого качества. Случайно отбираются 3 изделия. Составить закон распределения случайной величины X числа изделий высокого качества среди отобранных.

10. Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X — числа выстрелов, сделанных стрелком. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет 0,7. Найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

11. Покупатель посещает магазины для приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. Составить закон распределения случайной величины X — числа магазинов, которые посетит покупатель из четырех возможных. Построить график распределения. Найти наиболее вероятное число магазинов, которые посетит покупатель.

12. В партии, состоящей из N изделий, имеется M бракованных. Наудачу выбираются n изделий из этой партии $(n < M, n < N - M)$. Пусть X — число бракованных изделий в выборке. Случайная величина X называется гипергеометрической с параметрами N, M, n.

а) Найдите распределение случайной величины X, т. е. найдите $p_k = P(X = k), k = 0,1, \dots, n$;

б) проверьте, что

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1;$$

в) вычислите $M(X)$;

г) покажите, что если $N, M \to \infty$, так что $\frac{M}{N} = p, 0 < p < 1$, то гипергеометрическое распределение сходится к биномиальному.

13. На конноспортивных соревнованиях необходимо преодолеть четыре препятствия с вероятностями, равными соответственно 0,9, 0,8, 0,7, 0,6. При первой неудаче спортсмен в дальнейших состязаниях не участвует. Составить закон распределения случайной величины X — числа взятых препятствий. Найти математическое ожидание случайной величины X.

14. В игре спортивной лотереи угадывается 5 номеров из 36. Игрок получает выигрыш, если угадает 5, 4 или 3 номера. За 5 угаданных номеров выигрыш составляет 1 млн руб. Сумма выигрыша по одной карточке за 4 правильно угаданных номера в 9 раз больше, чем за 3. Составить закон распределения случайной величины X — числа правильно угаданных номеров. Определить среднюю величину выигрыша, если известно, что карточек было выпущено 1 млн шт. Стоимость одной карточки 100 руб. Выигрыши составляют 50% общей суммы тиража, который весь был продан.

15. Вероятность успешной сдачи экзамена первым студентом составляет 0,7, а вторым — 0,8. Составить закон распределения случайной величины X — числа студентов, успешно сдавших экзамен, если каждый из них может пересдать один раз экзамен, если он его первый раз не сдал. Найти математическое ожидание случайной величины X.

16. Предприниматель рассматривает возможность покупки акций трех предприятий, по каждой из которых известна доходность как отношение величины получаемого дохода за период времени к цене акции и вероятности возможных значений доходности. Акции какого предприятия следует считать более доходными, если руководствоваться средним значением (математическим ожиданием) доходности? Акции какого предприятия являются менее рискованными (считается, что чем выше колеблемость доходности акций, тем больше их рискованность)?

Предприятие 1		Предприятие 2		Предприятие 3	
доходность (%), X	вероятность, P_x	доходность (%), Y	вероятность, P_x	доходность (%), Z	вероятность, P_z
5	0,2	3	0,1	1	0,1
7	0,3	7	0,4	6	0,4
9	0,4	10	0,3	10	0,25
11	0,1	15	0,2	20	0,25

17. Случайные величины X и Y независимы. Если $M(X) = 6$, $M(Y) = 5$, $D(X) = 5$, $D(X) = 5$, $D(Y) = 4$, найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин:

а) $Z = 4X + 2Y$;

б) $Z = 5X - 3Y$;

в) $Z = 3X - Y$.

18. Вероятность изготовления бракованной детали автоматом равна 0,002. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение слу-

чайной величины X — числа бракованных деталей, если деталей изготовлено 1000. Определить вероятность того, что из 1000 деталей будет изготовлено:

а) не более двух бракованных;

б) хотя бы одна бракованная.

19. Независимые случайные величины X и Y имеют следующие распределения:

x_i	2	4	6
p_i	0,3	0,5	0,2

y_j	3	4
p_j	0,4	0,6

Составить закон распределения случайных величин:

а) $Z = X+Y$;

б) $V = XY$.

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин Z и V.

20. В коробке 5 белых и 5 черных шаров. Вы случайным образом вытаскиваете два шара. Если они одинакового цвета, вы выигрываете 1 руб., если разного, то проигрываете 1 руб. (т. е. выигрыш составит –1 руб.). Найдите среднее значение вашего выигрыша.

21. Два стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна $N/(N+5)$, вторым — $N/(N+2)$. Составить закон распределения случайной величины $Z = X + Y$, где X — число поражений мишени первым стрелком; Y — число поражений мишени вторым стрелком. Найти числовые характеристики случайной величины Z.

22. Случайные величины X — площадь посева овощей на хозяйство (га) и Y — урожайность овощей с 1 га (т) имеют следующие распределения:

x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

y_j	10	15	20
p_j	0,2	0,5	0,3

Определить средний валовой сбор овощей на хозяйство, дисперсию и среднее квадратическое отклонение валового сбора овощей.

23. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 1$ с вероятностью $p_1 = 0,2$; $x_3 = 5$ с вероятностью $p_1 = 0,3$ и x_2 с вероятностью p_2. Найти x_2 и p_2, если известно, что $M(X) = 3$.

24. Вероятность сдать экзамен студентом на отлично равна 0,3, на хорошо — 0,4. Определить вероятности получения других оценок (2; 3), если известно, что $M(X) = 3,9$.

25. Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,02. Найти $\mathrm{M}(X)$ и $\sigma(X)$ числа выигравших билетов, если их было приобретено 100.

26. По одному тиражу лотереи куплено 100 билетов. Среднее квадратическое отклонение числа выигранных билетов равно трем. Найти вероятность выигрыша по одному билету лотереи.

27. Подброшены две игральные кости. Найти $M(X)$, где случайная величина X — сумма числа очков, которые могут появиться на двух выпавших гранях.

28. Хозяйство продает крупный рогатый скот живым весом x_1 и x_2 ($x_1 > x_2$). Вероятность того, что крупный рогатый скот будет продан весом x_1, равна 0,4.

Найти закон распределения случайной величины X — веса крупного рогатого скота, если математическое ожидание составило 4,60 ц, а дисперсия — 0,24.

29. Совокупность семей имеет следующее распределение по числу детей:

x_i	x_1	x_2	2	3
p_i	0,1	p_2	0,4	0,35

Определить x_1, x_2, p_2, если известно, что $M(X) = 2$, $D(X) = 0,9$

30. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки в бухгалтерских проводках счетов. Предположим, что служащие компании при обработке 100 входящих счетов допускают примерно 5 ошибок. Аудитор случайно отбирает 3 входящих документа. Найти закон распределения случайной величины X — числа ошибок, выявленных аудитором. Построить функцию распределения и её график (вероятностную гистограмму). Определить вероятность того, что аудитор обнаружит более чем одну ошибку.

31. Опираясь на формулы бинома Ньютона для отрицательной степени и формулу задачи 8 г) из раздела 1.3, вывести формулу отрицательного биномиального распределения:

$$1 = p^k(1-q)^{-k} = p^k \sum_{m=0}^{n} C_{m+k-1}^{m}\, q^m.$$

Производящие функции

$$A(Z) = a_0 + a_1Z + a_2Z^2 + a_3Z^3 + \cdots = \sum_{k\geq 0} a_kZ^k,$$

производящая функция для последовательности

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}.$$

Пример 1. Пусть имеются две производящие функции для последовательностей $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}$ и $\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, \dots\} = \{b_m\}$ соответственно

$$A(Z) \text{ и } B\,(Z) = b_0 + b_1Z + b_2Z^2 + b_3Z^3 + \cdots = \textstyle\sum_{m\geq 0} b_mZ^m\,.$$

Решение. Рассмотрим произведение $A(Z)B(Z) = C(Z)$.

$$A(Z)B(Z) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)Z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)Z^2 + \cdots,$$

следовательно,

$$A(Z)B(Z) = \sum_{k\geq 0}\sum_{m\geq 0} a_k\, Z^k b_m Z^m = C(Z) = c_0 + c_1Z\; c_2Z^2 + \cdots$$

Приравняем коэффициенты при Z^n и получим формулу

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

свертки последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_m\}$.

Если случайная величина X принимает только целые неотрицательные значения, то распределение ее вероятностей $P(X = k) = P_k$ можно представить как степенной ряд (в частном случае многочлен) по степеням Z:

$$\varphi(Z) = \sum_{k\geq 0} P(X = k)Z^k = M(Z^x).$$

И обратно, любой степенной ряд $\varphi(Z)$ с неотрицательными коэффициентами и свойством $\varphi(1) = 1$ является производящей функцией случайной величины. Он содержит всю информацию о случайной величине X.

Свойства производящей функции неотрицательной целочисленной случайной величины, $\varphi_x(Z)$:

1) $\varphi(1) = 1$;

2) $\sum_{k\geq 0} P(X = k) = 1$;

3) $D(x) = \varphi''_x(1) + \varphi'_x(1) - [\varphi'_x(1)]^2$;

4) Если случайные величины X и Y независимы и принимают только целые неотрицательные значения, то распределение их суммы будет определяться *сверткой последовательностей:*

$$P(X + Y = n) = \sum_k P(X = k, Y = n - k) = \sum_k P(X = n - k)P(Y = k),$$

которая называется формулой полной вероятности.

Свертке этих последовательностей отвечает произведение производящих функций

$$\varphi_{X+Y}(Z) = \varphi_X(Z)\varphi_Y(Z).$$

32. Найти производящую функцию, математическое ожидание и дисперсию для законов распределения дискретной случайной величины:

1) Бернулли;

2) биномиального;

3) геометрического;

4) геометрического, сдвинутого на единицу;

5) отрицательного биномиального;

6) Пуассона;

7) гипергеометрического.

33. Бросают 12 игральных костей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X — суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.

34. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,9, вторым — 0,8 и третьим — 0,7. Составить закон распределения случайной величины X — числа попаданий в цель, если каждый стрелок производит по одному выстрелу. Определить математическое ожидание случайной величины X.

35. В бригаде имеются два звена тракторов. В первом звене — 3 трактора, причем вероятность безотказной работы каждого из них в течение смены равна 0,9. Во втором звене — 2 трактора, вероятность безотказной работы первого из них равна 0,8, а второго — 0,7. Составить закон распределения случайной величины X — числа тракторов, работавших безотказно в бригаде. Найти

математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

36. Игрок поочередно покупает билеты двух разных лотерей до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету первой лотереи составляет 0,2, а второй — 0,3. Игрок вначале покупает билет первой лотереи. Составить закон распределения и найти математическое ожидание случайной величины X — числа купленных билетов, если он имеет возможность купить:

а) только 5 билетов;

б) неограниченное число билетов.

4. Непрерывные случайные величины

Функция распределения случайной величины (интегральная функция)

$$P(X < x) = F(x). \tag{4.1}$$

Свойства $F(x)$:

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0,1]:

$$0 \leq F(x) \leq 1;$$

2) функция распределения является неубывающей функцией, т. е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$;

3) $F(-\infty) = 0$ как вероятность невозможного события;

4) $F(+\infty) = 1$ как вероятность достоверного события;

5) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

$$f(x) = F'(x)$$

— *функция плотности распределения вероятностей.*

Свойства $f(x)$:

1) $f(x) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;

4) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

1) *Математическое ожидание* непрерывной случайной величины X определяется по формуле

$$M(X) = \alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

2) *Мода* непрерывной случайной величины X будет определяться как значение, доставляющее максимум ее функции плотности распределения вероятностей:

$$M_o(X) = \underset{(-\infty;+\infty)}{argmax}\, f(x).$$

3) *Медиана* — это значение случайной величины, которое делит площадь под функцией плотности вероятности на две равные части:

$$P\big(X < M_e(X)\big) = P\big(X > M_e(X)\big) = \frac{1}{2}.$$

4) *Дисперсия* непрерывной случайной величины:

$$D(X) = \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \; - \; M^2(X).$$

Числовые характеристики случайных величин

ДСВ	НСВ
Начальные моменты $\alpha_S = M(X^s)$.	
$\alpha_s = M(X^s) = \sum_i x_i p_i$	$\alpha_s = M(X^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx,$
Центральные моменты $\mu_S = M\left(\dot{X}^s\right)$, $\alpha_1 = m_x$, $(\dot{X} = X - m_x)$	
$\mu_S = M\left(\dot{X}^s\right) = \sum_i x_i p_i$	$\mu_S = M\left(\dot{X}^s\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}^s f(x)dx,$
$\mu_1 = 0,$ $\mu_2 = \alpha_2 - m_x^2,$ $\mu_3 = \alpha_3 - 3m_x\alpha_2 + 2m_x^3,$ $\mu_4 = \alpha_4 - 4m_x\alpha_3 + 6m_x^2\alpha_2 - 3m_x^4$	

1. Даны законы распределения дискретной случайной величины:

а)

X	1	4	6	8
p	0,1	0,3	0,4	0,2

б)

X	−2	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,1

Найти функцию распределения случайной величины X и построить ее график.

2. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины X — числа попаданий в цель, если произведено три выстрела с вероятностью попадания в цель при каждом выстреле 0,8.

3. Вероятность сдачи первого экзамена студентом составляет 0,7, второго — 0,6 и третьего — 0,8. Найти функцию распределения случайной величины X — числа экзаменов, сданных студентом. Определить $M(X)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ при } -2 \le x \le 2, \\ 1 \text{ при } x \ge 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение:

а) меньше 0;

б) меньше 1;

в) не меньше 1;

г) заключенное в интервале (0;2).

5. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \dfrac{x^6}{4} \text{ при } 0 \le x < \sqrt[3]{2}, \\ 1 \text{ при } x \ge \sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате шести испытаний случайная величина X два раза примет значение, принадлежащее интервалу (0;1).

6. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1,\\ \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{1}{8} \text{ при } 1\le x<3,\\ 1 \text{ при } x\ge 3.\end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения вероятностей случайной величины X;

б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2).

7. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-2a,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{a}{2} \text{ при } -2a\le x<(4-2a),\\ 1 \text{ при } x\ge (4-2a).\end{cases}$$

а) Определить вероятность попадания случайной величины в интервал $(-a; a)$;

б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

8. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<A,\\ \dfrac{x^3}{8} \text{ при } A\le x<B,\\ 1 \text{ при } x\ge B.\end{cases}$$

Найти значения A и B, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

9. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1,\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2} \text{ при } 1\le x<2,\\ 1 \text{ при } x\ge 2.\end{cases}$$

Найти:

а) функцию плотности распределения вероятностей случайной величины X;

б) вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение, принадлежащее интервалу (1; 1,5);

в) начертить графики функций.

10. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<2,\\ \dfrac{x^3-8}{19} \text{ при } 2\le x<3,\\ 1 \text{ при } x\ge 3.\end{cases}$$

Найти:

а) функцию плотности вероятностей;

б) вероятность попадания случайной величины в интервал (2,5, 3);

в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

г) моду и медиану величины X.

Построить графики функций.

11. Случайная величина X задана функцией плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \dfrac{4a - 2x}{3a^2} \text{ при } 0 \leq x < a, \\ 0 \text{ при } x \geq a. \end{cases}$$

Найти:

а) функцию распределения случайной величины;

б) вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{3}\right)$.

12. Случайная величина X задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1, \\ \dfrac{1}{16} \text{ при } 1 \leq x < 17, \\ 0 \text{ при } x \geq 17. \end{cases}$$

Определить:

а) функцию распределения вероятностей случайной величины X;

б) вероятность попадания случайной величины в интервал (9,12);

в) начертить графики функции.

13. Случайная величина X задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \dfrac{4}{a^2} x^3 \text{ при } 0 \leq x < \sqrt{a}, \\ 0 \text{ при } x \geq \sqrt{a}. \end{cases}$$

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале ($\sqrt{0{,}25a}$; $\sqrt{0{,}5a}$);

в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

14. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1, \\ a(x-1)^2 \text{ при } 1 \leq x < 3, \\ 1 \text{ при } x \geq 3. \end{cases}$$

Определить:

а) значение a;

б) математическое ожидание;

в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1, 2);

г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Дана функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ 0{,}5(1+\sin x) \text{ при } -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 \text{ при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

16. Случайная величина задана функцией плотности вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1, \\ \dfrac{3x^2 - 2x}{c} \text{ при } 1 \le x < 4, \\ 0 \text{ при } x \ge 4. \end{cases}$$

Найти:

а) постоянную c;

б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

17. Случайная величина X задана функцией $f(x) = \frac{2c}{e^x + e^{-x}}$ при $-\infty < X < +\infty$. Найти постоянную c.

5. Законы распределения непрерывных случайных величин

5.1 Основные законы распределения

Закон	Функции плотности вероятности (f) и функции распределения (F)	
Равномерный, $U[a,b]$	$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a, \\ \dfrac{1}{\beta - \alpha} \text{ при } \alpha \le x < \beta, \\ 0 \text{ при } x \ge \beta \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ при } \alpha \le x < \beta, \\ 1 \text{ при } x \ge \beta \end{cases}$
Показательный, E_λ	$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$
Нормальный, $N(a, \sigma^2)$	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$F(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{z^2}{2}} dz$

Продолжение табл.

Закон	Функции плотности вероятности (f) и функции распределения (F)	
Стандартный нормальный, $N(0,1)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{z^2}{2}} dz$
Логарифмически нормальный, $LN(lna, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(lnx-lna)^2}{2\sigma^2}}$	

1. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-2;\ N)$. Найти:

а) функцию плотности вероятностей случайной величины X;

б) функцию распределения;

в) вероятность попадания случайной величины в интервал (–1, 0,5N);

г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

В задаче N — номер варианта.

2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале:

а) (5, 11);

б) (–3, 5).

Начертить графики этих функций.

3. Равномерно распределенная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 0{,}125$ в интервале $(a-4; a+4)$, вне интервала $f(x) = 0$. Найти $M(X)$, $D(X)$, σ(X).

4. Случайная величина X Y распределена по закону прямоугольного треугольника (рис. 5.1) в интервале (0; a).

Найти:

а) плотность вероятности случайной величины X;

б) функцию распределения;

в) вероятность попадания случайной величины в интервал (0,25a; 0,5a);

г) математическое ожидание (использовать стандартный подход и физический смысл), дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

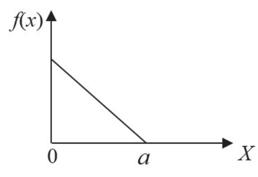


Рис. 5.1 — Плотность распределения закона прямоугольного треугольника

5. Случайная величина X распределена по закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») (рис. 5.2) на интервале $(-a; a)$. Найти:

а) плотность распределения вероятностей случайной величины X;

б) функцию распределения и построить ее график;

в) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-0{,}5a; 0{,}5a)$;

г) математическое ожидание (использовать стандартный подход и физический смысл), дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

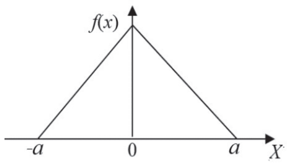


Рис. 5.2 — Плотность распределения Симпсона

6. Для исследования продуктивности определенной породы домашней птицы измеряют диаметр яиц. Наибольший поперечный диаметр яиц представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, со средним значением 5 см и средним квадратическим отклонением 0,3 см. Найти вероятность того, что:

а) диаметр взятого наудачу яйца будет заключен в границах от 4,7 до 6,2 см;

б) отклонение диаметра от среднего не превзойдет по абсолютной величине 0,6 см.

7. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 150 г и математическим ожиданием $a = 1000$ г. Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет:

а) от 900 до 1300 г;

б) не более 1500 г;

в) не менее 800 г;

г) отличаться от среднего веса по модулю не более чем на 200 г;

д) начертить график плотности вероятностей случайной величины X.

8. Урожайность озимой пшеницы по совокупности участков распределяется по нормальному закону с параметрами $a = 50$ ц/га, $\sigma = 10$ ц/га. Определить:

а) какой процент участков будет иметь урожайность свыше 40 ц/га;

б) процент участков с урожайностью от 45 до 60 ц/га.

9. Выборочным методом измеряется засоренность зерна, случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 0,2 г и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из четырех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 0,3 г.

10. Количество зерна, собранного с каждой делянки опытного поля, есть нормально распределенная случайная величина X, имеющая математическое ожидание $m = 60$ кг и среднее квадратическое отклонение, равное 1,5 кг. Найти симметричный относительно m интервал, в котором с вероятностью 0,9906 будет заключена величина X. Написать функцию плотности вероятности этой случайной величины.

11. С вероятностью 0,9973 было установлено, что абсолютное отклонение живого веса случайно взятой особи крупного рогатого скота от среднего веса животного по всему стаду не превосходит 30 кг. Найти среднее квадратическое отклонение живого веса скота, считая, что распределение скота по живому весу подчиняется нормальному закону.

12. Урожайность овощей по участкам является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 300 ц/га и средним квадратическим отклонением 30 ц/га. С вероятностью 0,9545 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на участках.

13. Нормально распределенная случайная величина X задана функцией $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{32}}$. Определить:

а) $P(3 \le X \le 9)$;

б) моду и медиану случайной величины X.

14. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Найти интервал, в который с вероятностью 0,9545 попадет случайная величина X в результате испытаний.

15. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 20$. Вероятность попадания ее в интервал (20; 30) равна 0,4772. Определить вероятность попадания случайной величины в интервал (10; 25).

16. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если:

а) параметр $\lambda = 2$;

б) $\lambda = 5$;

в) $\lambda = 0{,}5$.

17. Случайная величина X распределена по показательному закону с $\lambda = 2$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал:

а) (0; 1);

б) (2; 4).

18. Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$ показательного закона распределения случайной величины X заданной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0, \end{cases}$$

если:

а) $\lambda = 0{,}4$;

б) $\lambda = 3$;

в) $\lambda = 4$.

19. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность безотказной работы первого имеет распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}1t}$, второго — $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью 20 ч:

а) оба элемента будут работать;

б) откажет только один элемент;

в) откажет хотя бы один элемент;

г) оба элемента откажут.

20. Вероятность того, что оба независимых элемента будут работать в течение 10 сут, равна 0,64. Определить функцию надежности для каждого элемента, если функции одинаковы.

21. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы, равно 2. Найти вероятность того, что за 3 ч работы оператор сделает:

а) 4 ошибки;

б) не менее двух ошибок;

в) хотя бы одну ошибку.

22. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит:

а) 4 вызова;

б) не менее трех вызовов.

23. Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Число этих заказов — нормально распределённая случайная величина со средним квадратическим отклонением $\sigma = 560$ и неизвестным математическим ожиданием a. В 90% случаев число ежемесячных заказов превышает 12 439. Найдите среднее число заказов, получаемых фирмой за месяц.

24. Масса товаров, помещаемых в контейнер определённого размера, — нормально распределённая случайная величина. Известно, что 65% контейнеров имеют чистую массу менее чем 4,2 т. Найдите среднее значение и среднее квадратическое отклонение чистой массы контейнера.

25. Служащий рекламного агентства утверждает, что время, в течение которого телезрители помнят содержание коммерческого рекламного ролика, подчиняется экспоненциальному закону с $\lambda = 0{,}25$ дня. Найдите долю зрителей, способных вспомнить рекламу спустя 7 дней.

26. Крестьянские (фермерские) хозяйства и индивидуальные предприниматели региона по численности работников распределяются по логарифмически нормальному закону с параметрами $a = 1{,}677$, $\sigma^2 = 0{,}4076, \overline{\ln x} = 0{,}7336$. Определить:

а) среднюю численность работников на одно хозяйство (математическое ожидание);

б) дисперсию и среднее квадратическое отклонение;

в) медианное и модальное значения;

г) какой процент крестьянских (фермерских) хозяйств и индивидуальных предпринимателей имеют численность работников от 3 до 6 человек.

27. Время «жизни» некоторой микросхемы имеет нормальное распределение со средним 11 мес. и стандартным отклонением 2 мес. Сложная система содержит 150 таких микросхем. Оцените вероятность того, что в течение 12 мес. по крайней мере 100 микросхем потребуют первичной замены (повторные замены не учитывать, схемы работают независимо).

28. Для работы системы критической является одна микросхема. Если эта микросхема ломается, она немедленно заменяется новой. Среднее время непрерывной работы этой микросхемы равно 80 ч, стандартное отклонение — 30 ч. Какой нужно иметь запас микросхем, чтобы с вероятностью 95% обеспечить непрерывную работу системы в течение 4000 ч?

29. Многие люди верят, что ежедневное изменение цены акций некоторой компании является случайной величиной со средним 0 и некоторой дисперсией σ^2, и эти изменения в разные дни независимы. Иными словами, если Y_n — цена акции в день n, то $Y_n = Y_{n-1} + X_n$, где $\{X_n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $M(X_n) = 0$, $D(X_n) = \sigma^2$. Предполагая, что 1 апреля цена акции 100 и $\sigma^2 = 1$, оцените вероятность того, что через два месяца (60 дн.) цена будет выше 110.

5.2. Специальные законы распределения

Распределение	Функции плотности вероятности (f) и функции распределения (F)
χ^2— *Пирсона* $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$	$f(\chi^2) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}} \text{ при } \chi^2 \geq 0, \\ 0 \text{ при } \chi^2 < 0 \end{cases}$
t — Стьюдента $t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i^2}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_k^2}{k}}}$	$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$
F — *Фишера — Снедекора* $F(m, n) = \frac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}}$	$f(F) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} - \frac{F^{\frac{k_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{k_1}{k_2}F\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} \text{ при } F > 0, \\ 0 \text{ при } F \leq 0, \end{cases}$
Гамма с параметрами $\alpha > 0, \lambda > 0$	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, x > 0$
Бета с параметрами $\alpha > 0, \beta > 0$	$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, 0 < x < 1$
Дирихле в r-мерном пространстве на $(r-1)$-мерном симплексе	$f(p, \alpha) = \frac{\prod p_i^{\alpha_i - 1}}{B(\alpha)}, \sum_{i=1}^{r} p_{ti} = 1$ (обобщение бета-распределения — распределения на одномерном симплексе (отрезке) на многомерный случай)
Коши с параметрами α, β	$f(x) = \frac{1}{\pi\alpha}\frac{1}{1 + \left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2}$
Парето с параметрами a, β	$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a, \\ 1 - a\left(\frac{a}{x}\right)^\beta \text{ при } x \geq a, \beta > 0. \end{cases}$
Гумбеля (экстремальное распределение)	$F(x) = e^{-e^{-x}}, -\infty < x < \infty, \alpha > 0$

1. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Определить:

а) функцию распределения случайной величины X;

б) вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

2. Случайная величина X распределена по закону Рэлея:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

Найти:

а) функцию плотности вероятностей случайной величины X;

б) вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2), если $a = 1$;

в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

3. Функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом, имеет вид закона Парето:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a, \\ 1 - a\left(\frac{a}{x}\right)^{\beta} \text{ при } x \geq a, \beta > 0. \end{cases}$$

Определить:

а) размер годового дохода, который для случайно взятого лица будет превышен с вероятностью 0,8;

б) плотность вероятностей случайной величины X;

в) математическое ожидание случайной величины X при $\beta > 1$.

4. Используя понятие гамма-функции Эйлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \text{ (при } R_+, \alpha > 0),$$

показать, что:

а) $\Gamma(1) = 1$;

б) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ при $\alpha > 0$;

в) $\Gamma(1) = 0! = 1$;

г) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Решение. Действительно, интегрируя, получим:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = -\int_0^{+\infty} de^{-x} = -(\lim_{b \to +\infty} e^{-b} - 1) = 1.$$

5. Случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами $a > 0, b > 0$, если плотность ее распределения есть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, \text{если } x > 0, \\ 0, \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$.

а) Случайные величины X и Y независимы и имеют гамма-распределение с параметрами a_1, b и a_2, b соответственно. Докажите, что случайная величина $X+Y$ имеет гамма-распределение, и найдите параметры этого распределения.

б) Пусть $Z \sim N(0,1)$. Докажите, что случайная величина $\mathrm{X} = \frac{Z^2}{2}$ имеет гамма-распределение с параметрами 1/2, 1.

6. Разыгрывается случайная величина U, равномерно распределенная от отрезка $[0,1]$. Если $U = p$, то n раз подбрасывается монета, у которой вероятность выпадения орла при однократном подбрасывании равна p. Пусть X — общее число выпавших орлов. Найдите распределение случайной величины X.

Указание. Воспользуйтесь равенством

$$\int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{b-1} dz = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

и тем фактором, что $\Gamma(k) = (k-1)!$ для натурального k.

6. Система двух случайных величин

Закон распределения *дискретной двумерной случайной* величины можно представить в виде таблицы, характеризующей совокупность всех пар значений случайных величин $\left(X = x_i, Y = y_j\right)$ и соответствующих вероятностей $p\left(x_i, y_j\right), i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p\left(x_i, y_j\right) = 1. \tag{6.1}$$

Маргинальные распределения:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p\left(x_i, y_j\right);\ \ p\left(y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(x_i, y_j\right);\ \sum p\left(y_j\right) = 1;\ \sum p(x_i) = 1.$$

Условные вероятности находятся по формулам:

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)},\ p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \tag{6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i / y_j) = 1, \sum_{j=1}^{m} p(y_j / x_i) = 1.$$

Условное математическое ожидание случайной величины X при условии, что $Y = y_j$ определяется как

$$M\left(X / Y = y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \sum_{i=1}^{n} x_i p\left(x_i / y_j\right). \tag{6.3}$$

Условное математическое ожидание имеет следующие свойства.

1. $M(\varphi(X)/X) = \varphi(X)$.
2. $M(\varphi(X)Y/X) = \varphi(X)M(Y/X)$.
3. $M(aX_1 + bX_2 / Y) = aM(X_1 / Y) + bM(X_2 / Y)$, a и b константы.

4. Правило повторного математического ожидания

$$M(M(Y/X)/g(X)) = M(Y/g(X)).$$

В частности, имеет место *формула полной вероятности для вычисления математического ожидания:*

$$M(Y) = M(M(Y/X)) = \Sigma_j M(Y/X = x_j)P(X = x_j).$$

5. Если случайные величины X и Y независимы, то $M(X/Y) = M(X)$.

Если случайные величины X, Y независимы, то для любой их комбинации выполняется равенство $p(x_i y_j) = p(x_i)p(y_j)$.

Двумерная случайная величина задается в виде функции распределения: $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$, которая означает вероятность попадания двумерной случайной величины в квадрант левее и ниже точки с координатами $(x; y)$.

Свойства функции распределения:

1) значения функции распределения заключены между нулем и единицей:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1;$$

2) функция распределения не убывает и непрерывна слева по каждому аргументу, т. е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$, и если $y_2 > y_1$, то

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1);$$

3) $F(x, +\infty) = F_1(x)$ — функция распределения случайной величины X; $F(+\infty, y) = F_2(y)$ — функция распределения случайной величины Y;

4) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$; $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Случайные величины X, Y *независимы*, если

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y), \tag{6.4}$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции распределения составляющих.

Плотность вероятности системы двух непрерывных случайных величин определяется как вторая смешанная частная производная ее функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''(x, y). \tag{6.5}$$

Свойства функции плотности вероятности:

1) плотность вероятности двумерной случайной величины неотрицательна:

$$f(x, y) \geq 0; \tag{6.6}$$

2) двойной несобственный интеграл двумерной случайной величины с бесконечными пределами равен единице:

$$\iint_{-\infty -\infty}^{+\infty +\infty} f(x, y)dxdy = 1; \tag{6.7}$$

3) функция распределения двумерной случайной величины через плотность распределения выражается формулой

$$F(x, y) = \iint_{-\infty -\infty}^{x\ y} f(x, y)dxdy. \tag{6.8}$$

Геометрически свойство (6.6) означает, что объем тела, ограниченного поверхностью $f(x,y)$ и плоскостью XOY, равен 1.

Маргинальные распределения случайных величин X и Y, согласно свойствам функции двумерного распределения, соответственно равны:

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \iint_{-\infty -\infty}^{x \; +\infty} f(x,y)dydx, \quad (6.9)$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \iint_{-\infty -\infty}^{y \; +\infty} f(x,y)dxdy. \quad (6.10)$$

Учитывая, что производная функции с переменным верхним пределом равна подынтегральному выражению, получим

$$\frac{dF_1(x)}{dx} = f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \text{ и } \frac{dF_2(y)}{dx} = f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad (6.11)$$

плотности вероятности одномерных непрерывных случайных величин X и Y, входящих в систему, характеризующих предельную (*маргинальную*) вероятность.

Если случайные величины X и Y независимы, то

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y), \quad (6.12)$$

где $f_1(x) = F_1'(x)$, $f_2(y) = F_2'(y)$ — плотности распределения составляющих X и Y.

В противном случае

$$f(x,y) = f_1(x)f(y/x) \text{ или } f(x,y) = f_2(y)f(x/y), \quad (6.13)$$

где $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$ — условная плотность распределения случайной величины Y при заданном значении случайной величины $X = x$; $f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$ — условная плотность распределения случайной величины X при заданном значении $Y = y$.

Условное математическое ожидание непрерывной случайной величины X при условии, что $Y = y$ имеет те же свойства, что и для дискретной случайной величины, и определяется как

$$M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x/Y = y)dx. \quad (6.14)$$

Если известна плотность вероятности двумерной случайной величины, то вероятность ее попадания в область D определяется по формуле

$$P\big((X,Y) \subset D\big) = \iint_D f(x,y)dxdy. \quad (6.15)$$

Ковариация (корреляционный момент):

$$\mu_{1,1} = M\big(\dot{X}^1\dot{Y}^1\big) = cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = m_{xy}. \quad (6.16)$$

Корреляционный момент является мерой связи случайных величин. *Если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(XY) = M(X)M(Y). \quad (6.17)$$

Пример 1. Двумерная дискретная случайная величина задана таблицей совместного распределения:

X	Y			$p(x)$
	10	15	20	
4	0,2	0,05	—	0,25
6	0,1	0,3	0,1	0,5
П8	—	0,1	0,15	0,25
$p(y)$	0,3	0,45	0,25	1,0

Составить условные законы распределения: случайной величины X, если случайная величина Y примет значение 15*;* случайной величины Y, если случайная величина X приняла значение 6. Определить основные числовые характеристики двумерной случайной величины (X, Y).

Решение. Случайная величина X при условии, что случайная величина $y = 15$, $\left(\frac{X}{y} = 15\right)$ принимает значения 4; 6; 8 с вероятностями $\frac{0{,}05}{0{,}45}$; $\frac{0{,}3}{0{,}45}$; $\frac{0{,}1}{0{,}45}$. Тогда условный закон распределения случайной величины $X/y = 15$ будет иметь следующий вид:

$X/y = 15$	4	6	8
$p(x/y = 15)$	1/9	2/3	2/9

Случайная величина $Y/x = 6$ принимает значения 10; 15; 20 с вероятностями $\frac{0{,}1}{0{,}5}$; $\frac{0{,}3}{0{,}5}$; $\frac{0{,}1}{0{,}5}$. Тогда условный закон распределения случайной величины $Y/x =$ $= 6$ будет иметь следующий вид:

$Y/x = 6$	10	15	20
$p(y/x = 6)$	0,2	0,6	0,2

Найдем математические ожидания, дисперсии и средние квадратические отклонения случайных величин X и Y*:*

$$M(Y) = 10 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}45 + 20 \cdot 0{,}25 = 14{,}75;$$

$$D(\mathrm{Y}) = 10^2 \cdot 0{,}3 + 15^2 \cdot 0{,}45 + 20^2 \cdot 0{,}25 - 14{,}75^2 =$$
$$= 13{,}6875;\ \sigma_y = \sqrt{13{,}6875} = 3{,}7;$$

$$M(X) = 4 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 0{,}25 = 6;$$

$$D(X) = 4^2 \cdot 0{,}25 + 6^2 \cdot 0{,}5 + 8^2 \cdot 0{,}2 - 36 = 2;\ \sigma_x = \sqrt{2} = 1{,}414;$$

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{x_i y_i} = 4 \cdot 10 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 15 \cdot 0{,}05 +$$
$$+ 6 \cdot 10 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 15 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 15 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 20 \cdot 0{,}15 = 92;$$

$$r_{yx} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{92 - 6 \cdot 14{,}75}{1{,}414 \cdot 3{,}7} = 0{,}669.$$

Пример 2. Бросаются три правильные монеты. Найти корреляцию общего числа решек на всех монетах и числа решек, выпавших на первой монете.

Решение. Представим в таблице все случаи появления орлов (О) и решек (Р) при подбрасывании трех монет:

Случай	монета		
	1	2	3
1	Р	Р	Р
2	Р	Р	О
3	Р	О	Р
4	О	Р	Р
5	Р	О	О
6	О	Р	О
7	О	О	Р
8	О	О	О

Пусть случайная величина X — число решек на первой монете, случайная величина Y — суммарное число решек на трех монетах. Тогда двумерная дискретная случайная величина (X, Y) будет задана следующей таблицей совместного распределения:

X	Y				$p(x)$
	0	1	2	3	
0	1/8	2/8	1/8	—	1/2
1	—	1/8	2/8	1/8	1/2
$p(y)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1,0

Отсюда:

$$M(X) = M(X^2) = \frac{1}{2}, D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \sigma(X) = \frac{1}{2};$$

$$M(Y) = \frac{3}{2}, M(Y^2) = 3, D(Y) = M(Y^2) - \left(M(Y)\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}, \sigma(Y) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$M(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.$$

Ковариация

$$cov(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}.$$

Коэффициент корреляции

$$r_{yx} = \frac{cov(XY)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1/4}{(1/2) \cdot \left(\sqrt{3}/2\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577.$$

Пример 3. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение вероятностей в области прямоугольного треугольника Δ с катетом a, т. е.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/S, \text{если } (x, y) \in \Delta, \\ 0, \text{если } (x, y) \notin \Delta, \end{cases}$$

где S — площадь треугольника Δ.

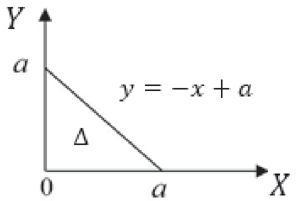


Рис. 6.1 — Область Δ

Определить: условные плотности распределения, $f(x/y)$ и $f(y/x)$; математические ожидания $\mathrm{M}(X), \mathrm{M}(Y)$; дисперсии $D(X), D(Y)$; условные математические ожидания $M(X/Y=y)$, $M(Y/X=x)$; коэффициент корреляции r_{xy}.

Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

Решение. Учитывая, что площадь прямоугольного треугольника Δ равна $S=\frac{1}{2}a^2$, получим $\frac{1}{S}=\frac{2}{a^2}$. Кроме того, ввиду ограниченности области треугольника в формулах (6.6.1)–(6.6.3) введем соответствующие ограничения и получим плотности вероятности одномерных непрерывных случайных величин X и Y, входящих в систему и характеризующих предельную (*маргинальную*) вероятность:

$$f_1(x)=\int_0^{-x+a}\frac{2}{a^2}dy=\frac{2}{a^2}(-x+a)=-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a}\text{ при } 0<x<a,$$

$$f_2(y)=\int_0^{-y+a}\frac{2}{a^2}dx=\frac{2}{a^2}(-y+a)=-\frac{2y}{a^2}+\frac{2}{a}\text{ при } 0<y<a.$$

Отсюда найдем условные функции плотности вероятности:

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1}{a-x}, f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{a-y}\ (0<x<a, 0<y<a).$$

Математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y будут совпадать в силу симметрии области и равномерности закона распределения, поэтому:

$$M(Y)=M(X)=\int_0^a x\left(-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a}\right)dx=\frac{a}{3},$$

$$M(Y^2)=M(X^2)=\int_0^a x^2\left(-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a}\right)dx=\frac{a^2}{6},$$

$$D(Y)=D(X)=M(X^2)-\big(M(X)\big)^2M=\frac{a^2}{6}-\left(\frac{a}{3}\right)^2=\frac{a^2}{18}.$$

Найдем условное математическое ожидание случайной величины X при условии, что $Y=y$ с учетом границ области треугольника:

$$M(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x/Y=y)dx=\int_0^a x\frac{1}{a-y}dx=\frac{a^2}{2(a-y)}.$$

Аналогично

$$M(Y/X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(Y/X=x)dy=\int_0^a y\frac{1}{a-x}dx=\frac{a^2}{2(a-x)}.$$

Ковариация равна

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)=\iint_{\blacktriangle} xyf(x,y)dxdy-\frac{a^2}{9},$$

отсюда, так как

$$\iint_{\Delta} xyf(x,y)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{-x+a} xy\frac{2}{a^2}dy=\frac{2}{a^2}\int_0^a x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{-x+a}dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^a x(-x+a)^2dx=\frac{1}{a^2}\int_0^a (x^3-2ax^2+ax)dx=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^4}{4}-2a\frac{x^3}{3}+a\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a=\frac{a^2}{12},$$

имеем

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{a^2}{12}-\frac{a^2}{9}=-\frac{a^2}{36}.$$

Коэффициент корреляции равен

$$r_{yx}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{-\frac{a^2}{36}}{\frac{a^2}{18}}=-\frac{1}{2}.$$

Так как коэффициент корреляции отличен от нуля, то случайные величины не являются независимыми (они коррелированы (в определенной степени линейно взаимосвязаны), равенство коэффициента корреляции нулю означает отсутствие коррелированности, но не отсутствие зависимости вообще).

Пример 4. Стержень длиной l наудачу разламывается на две части, после чего большая из частей опять разламывается надвое в наудачу выбранной точке:

а) найти вероятность того, что из полученных частей можно составить треугольник;

б) найти ковариацию и коэффициент корреляции между точками разлома.

Решение:

а) пусть для определенности $l=1$, тогда координаты излома $x,y\epsilon[0,1]$.

Если меньшая координата — величина X — равномерно распределена на [0,1], то $x\le y\le 1$ и равномерное распределение величины Y будет иметь вид

$$f(y/x)=1/1-x.$$

Для упрощения обозначим длины отрезков, на которые разбивается исходный, через $a=x,b=y-x,c=1-y$, записав для них неравенства треугольника, получим ограничения, задающие область D_1: $0\le x<\frac{1}{2}$, $y>\frac{1}{2}$, $y<x+\frac{1}{2}$ (рис. 6.2).

Функция плотности вероятности $f(x,y)=1/(1-x)$ при $(x,y)\in D_1$.

Аналогично, можно задать область D_2: $0 \le y < 1/2,\ x > 1/2,\ y = x - 1/2$. $f(x, y) = 1/x$, при $(x, y) \in D_2$.

Таким образом, построение треугольника возможно в области $D = D_1 \cup \cup D_2$, т. е. $(x, y) \in D$. Для вычисления искомой вероятности достаточно вычислить интеграл от функции $f(x, y)$ по множеству D.

В силу симметрии имеем:

$$2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2dx \int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \frac{dy}{1-x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{1-x}dx = 2\ln 2 - 1;$$

б) если $x < 1/2$, то случайная величина Y равномерно распределена на $[x, 1]$.

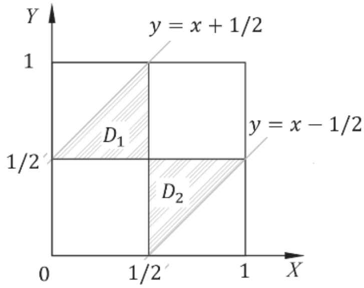


Рис. 6.2 — Область D

Если $1/2 < x < 1$, то случайная величина Y равномерно распределена на $[0, x]$. Значит, условное математическое ожидание Y можно представить в виде функции от X:

$$g(X) = M(Y/X = x) = \begin{cases} 0{,}5(1 + x), 0 < x < 0{,}5, \\ 0{,}5x, 0{,}5 < x < 1. \end{cases}$$

По свойству повторного условного математического ожидания:

$$M(Y) = M\big(M(Y/X)\big) = M\big(\mathrm{g}(x)\big) = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{g}(x)f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{g}(x)f(x)dx = \frac{1}{2};$$

$$M(Y^2) = M\big(M(Y^2 / X)\big) = M(g^2(x)) = 0{,}25\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1+x)^2 \cdot 1dx +$$

$$+0{,}25\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \cdot 1dx = \frac{13}{48}.$$

Откуда $D(Y) = 13/48 - (1/2)^2 = 1/48$. $M(X) = 0{,}5; D(X) = 1/12$ — в силу того, что величина X равномерно распределена на $[0, 1]$. По свойству условного математического ожидания

$$M(XY/X) = XM(Y/X) = X\mathrm{g}(X),$$

следовательно,

$$M(XY) = M\big(\mathrm{X}g(x)\big) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} xg(x)f(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} xg(x)f(x)dx = \frac{11}{48}.$$

Ковариация равна

$$\operatorname{cov}(x, y) = M(XY) - M(X)M(Y) = \frac{11}{48} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{48}.$$

Коэффициент корреляции равен

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{\frac{1}{48}}{2 \cdot \frac{1}{48}} = -\frac{1}{2}.$$

(Восстановите пропущенные выкладки.)

Независимость случайных величин определяется:

а) для дискретных случайных величин — совместная вероятность равна произведению вероятностей $P(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1) \ldots P(x_n)$;

б) для непрерывных случайных величин — совместная функция распределения случайного вектора равна произведению функций распределения координат $F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n)$, или совместная плотность распределения вероятностей случайного вектора равна произведению плотностей распределения вероятностей координат $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$.

1. Максимум из n случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ меньше z тогда и только тогда, когда каждая из них меньше z. Следовательно,

$$P(max\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} < z) = P(x_1 < z, x_2 < z, \ldots, x_n < z). \quad (6.18)$$

Если случайные величины независимы, то

$$P(max\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} < z) = P(x_1 < z)P(x_2 < z) \ldots P(x_n < z). \quad (6.19)$$

Если случайные величины независимы и имеют один закон распределения $F(x)$, то

$$P(max\,\{x_1, \ldots, x_n\} < z) = P(x_1 < z)P(x_2 < z) \ldots P(x_n < z) = \left(F(x)\right)^n. \quad (6.20)$$

2. Минимум из n случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не меньше z тогда и только тогда, когда каждая из них не меньше z. Следовательно,

$$P(min\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} < z) = 1 - P(min\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \geq z) =$$
$$= 1 - P(x_1 \geq z, x_2 \geq z, \ldots, x_n \geq z). \quad (6.21)$$

Если случайные величины независимы, то

$$P(min\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} < z) = 1 - P(x_1 \geq z)P(x_2 \geq z) \ldots P(x_n \geq z). \quad (6.22)$$

Если случайные величины независимы и имеют один закон распределения $F(x)$, то

$$P(min\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} < z) =$$
$$= 1 - P(x_1 \geq z)P(x_2 \geq z) \ldots P(x_n \geq z) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^n. \quad (6.23)$$

1. Задана двумерная дискретная случайная величина:

Y \ X	2	4
0	0,1	0,3
5	0,2	0,15
10	0,15	0,1

Найти законы распределения составляющих случайных величин.

2. Задана двумерная дискретная случайная величина:

Y \ X	0	5	20
0	0,15	0,2	0,10
10	0,10	0,3	0,15

Найти математическое ожидание и дисперсию составляющих случайных величин X и Y.

3. Задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} \text{ при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 \text{ при } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы (X, Y).

4. Функция распределения случайной двумерной величины задана в задании 3. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 5$.

5. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 5$, если известна функция распределения:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y} \text{ при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 \text{ при } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

6. Задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-4x})(1 - \mathrm{e}^{-2y}) \text{ при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 \text{ при } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы (X, Y).

7. Распределение 100 студентов по количеству пропущенных часов занятий и экзаменационной оценке представлено в следующей таблице.

Количество пропущенных часов	Оценка на экзамене			
	2	3	4	5
0	0	5	10	10
4	5	15	20	15
10	10	5	5	0

Найти безусловные и условные законы распределения случайных величин: количества пропущенных часов (X) и экзаменационной оценки (Y).

8. Распределение хозяйств по дозам внесения удобрений и урожайности озимой пшеницы приведено в следующей таблице:

Внесено удобрений на 1 га, ц д. в.	Урожайность, ц с 1 га			
	До 40	40–50	50–60	Свыше 60
до 1	18	*a*	5	—
1–2	*a*	15	20	10
свыше 2	—	*a*	12	20

Найти безусловные и условные законы распределения случайных величин урожайности (X) и доз внесения удобрений (Y) (a — число, заданное преподавателем).

9. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x, y) = a\sin(x + y)$ в квадрате $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и $f(x, y) = 0$ вне квадрата. Определить:

а) коэффициент a;

б) $M(X), M(Y)$;

в) $D(X), D(Y)$.

10. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $f(x, y) = \cos x \cos y$ в квадрате $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и $f(x, y) = 0$ вне квадрата. Доказать, что составляющие X и Y независимы.

11. Дана дискретная двумерная величина (X, Y). Найти:

а) условный закон распределения X при условии, что $y = 20$;

б) условный закон распределения Y при условии, что $x = 200$.

Y \ X	2	4
10	0,15	0,10
15	0,30	0,05
20	0,15	0,25

а)

Y \ X	100	200
0	0,10	0,25
5	0,05	0,20
10	0,10	0,30

б)

12. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно внутри треугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(0,6)$ и $B(6,0)$. Найти:

а) двумерную плотность вероятности системы;

б) плотности и условные плотности составляющих системы.

13. Система случайных величин (X, Y) распределена равномерно внутри квадрата со стороной a, диагонали которого совпадают с осями координат. Найти:

а) двумерную плотность вероятности системы;

б) плотности и условные плотности составляющих системы.

14. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} \text{ при } x > 0, y > 0, \\ 0 \text{ при } x \leq 0, y \leq 0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

15. Система случайных величин (X, Y) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, y = 0, x + y = a$ $(a > 0)$. Определить:

а) математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y;

б) корреляционный момент.

16. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной случайной величины (X, Y):

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 2e^{-2x} \text{ при } x > 0, \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0 \text{ при } y \le 0, \\ 5e^{-5y} \text{ при } y > 0. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность совместного распределения системы;

б) функцию распределения системы.

17. Двухмерное распределение пары целочисленных случайных величин ε и η задается с помощью таблицы:

η \ ε	–1	0	1
–1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

где на пересечении столбца $\varepsilon = i$ и строки $\eta = j$ находится вероятность $P\{\varepsilon = i, \eta = j\}$. Выяснить, зависимы или нет случайные величины ε и η. Найти:

а) одномерные распределения $P(\varepsilon = i)$ и $P(\eta = j)$;

б) условные вероятности $P(\eta = 1/\varepsilon = 0)$ и $P(\varepsilon = 1/\eta = 1)$;

в) совместное распределение величин $\varepsilon + \eta$ и $\varepsilon\eta$;

г) одномерные распределения величин $\varepsilon + \eta$ и $\varepsilon\eta$;

д) совместное распределение величин $\max(\varepsilon, \eta)$ и $\min(\varepsilon, \eta)$;

е) совместное распределение величин $|\varepsilon + 2\eta|$ и $|\varepsilon - \eta|$.

18. Пусть независимые случайные величины ε, η и ς имеют одинаковое геометрическое распределение с параметром p.

Найти:

а) $P(\varepsilon + \eta)$;

б) $P(\varepsilon \ge 2\eta)$;

в) $P(\varepsilon + \eta \le \varsigma)$.

19. Найти коэффициент корреляции между числом выпавших «единиц» и числом «шестерок» при n бросаниях правильной игральной кости.

20. Случайные величины X, Y независимы и имеют плотность распределения $f_X(x), f_Y(y)$ соответственно. Докажите, что $M(XY) = M(X)M(Y)$ в предположении, что математические ожидания существуют.

21. Докажите свойства (1), (2) коэффициента корреляции.

22. Двумерный случайный вектор $[X, Y]'$ имеет следующую плотность распределения:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2e^{-2x}}{x}, \text{если } 0 < x < +\infty, 0 \le y \le x, \\ 0 \text{ — в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите $Cov(X, Y)$.

23. Случайные величины X_1, X_2 независимы, X_1 распределена равномерно на отрезке $[0,1]$, X_2 — равномерно на отрезке $[0,1/2]$. Найдите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $Z = X_1 X_2$.

24. Двумерный случайный вектор $[X, Y]'$ имеет следующую плотность распределения:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C(x + y), \text{если } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, \\ 0 \text{ — в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите:

а) плотности маржинальных распределений $f_X(x), f_Y(y)$;

б) ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y;

25. Плотность совместного распределения случайных величин X и Y имеет следующий вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + y^2), \text{если } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \text{ — в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите:

а) константу C;

б) $P(X + Y > 1)$;

в) $\mathrm{cov}(X, Y)$;

г) являются ли величины X и Y независимыми;

д) являются ли величины X и Y одинаково распределенными?

26. Случайные величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[a, b]$. Пусть $m = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}, M = \max\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

Найдите

$$M\left(\frac{m + M}{2}\right), D\left(\frac{m + M}{2}\right).$$

27. Демографическое исследование семейных пар в некотором регионе показало, что стандартное отклонение возраста мужа равно 5 годам, возраста жены — 4 годам. Найдите корреляцию между возрастом мужа и возрастом жены, если стандартное отклонение разности возрастов мужа и жены равно 2 годам.

28. Доходность акций двух компаний — случайные величины X и Y с одинаковыми средними и матрицей ковариаций $V = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$. В какой пропорции надо купить акции этих компаний, чтобы дисперсия доходности получившегося портфеля была наименьшей?

Указание. Если решено купить долю $a (0 \leq a \leq 1)$ акций первой компании, то доходность соответствующего портфеля есть $R = aX + (1 - a)Y$.

29. Студент A сообщает студенту B значение случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[2, 4]$. Студент B подкидывает правильный кубик и, если выпало 1 или 2, извлекает из этого значения квадратный корень, а в остальных случаях прибавляет к нему единицу. Обозначим полученную величину Y. Найдите распределение случайной величины Y.

Условные распределения

30. Пусть X_1, X_2 — независимые пуассоновские величины с параметрами λ_1, λ_2 соответственно. Найдите условное распределение

$$\mathrm{P}_n(k) = P(X_1 = k/X_1 + X_2 = n), k = \overline{0, n}$$

и условное среднее $M(X_1/X_2 + X_2 = n)$.

31. Пусть X, Y — независимые случайные величины, имеющие геометрическое распределение

$$P(X = k) = P(Y = k) = q^{k-1}p, k = 1, 2, \ldots, q = 1 - p.$$

Найдите условное распределение

$$P_n(k) = P(X = k/X + Y = n),\ k = 1, 2, \ldots., n - 1,$$

и условное среднее

$$M(X/Y + Y = n).$$

32. Игрок A подбрасывает 10 раз неправильную монету, у которой вероятность выпадения орла равна 0,6. Пусть X_1 — общее число выпавших орлов. Затем игрок B подбрасывает ту же монету X раз. Пусть X_2 — общее число выпавших при этом орлов. Найдите $\mathrm{P}(X_2 \leq 1)$.

33. Водитель ежедневно делает X остановок, причем величина X имеет пуассоновское распределение с параметром λ. Если водитель сделал x остановок, то расстояние Y, которое он преодолевает за день, имеет нормальное распределение со средним αx (км) и стандартным отклонением βx (км). Чему равны среднее значение и дисперсия ежедневного пробега водителя?

34. Игрок одновременно подбрасывает правильный кубик и правильную монету. Если выпал орел, выигрыш игрока равен удвоенному числу очков, выпавших на кубике, если решка — половине очков. Чему равен средний выигрыш игрока?

35. Количество покупателей, посещающих продуктовый магазин в течение дня, является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 50$. Стоимость покупки одного покупателя имеет нормальное распределение со средним $m = 500$ руб. и стандартным отклонением $\sigma = 70$ руб. (мы игнорируем исчезающе малую вероятность того, что стоимость может быть отрицательной). Чему равна средняя выручка магазина за день? Предполагается, что количество покупателей и их траты независимы.

Нормальные распределения векторов

36. Пусть $Z \sim N(0_k, I_k), A - k \times k$ — невырожденная матрица и $m - k \times 1$ — вектор. Найдите плотность распределения случайного вектора $X = AZ + m$.

37. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы, $X_i \sim N\left(0, \sigma_i^2\right), i = 1, \ldots, n$. Найдите распределение случайного вектора

$$Y = [X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3, \ldots, X_1 + X_2 + \ldots + X_n]'.$$

38. Количество кофе, которое выдает кофемолка, установлено на уровне 97,5 г со стандартным отклонением процесса намола 5 г.

а) Какая часть банок кофе будет содержать менее 95 г?

б) Чему равна вероятность того, что случайная выборка размером 60 банок будет иметь среднее меньше 99 г?

в) Какая часть выборочных средних окажется не меньше 100 г при выборке в 9 банок?

39. Студентки Аня и Маша каждое утро встречаются на станции метро «Китай-город», чтобы вместе ехать в университет. Они одновременно выходят из своих квартир. Каждая девушка ждет другую не более 10 мин, после чего едет в университет одна. Для поездки от дома до станции метро «Китай-город» Аня тратит время X, имеющее нормальное распределение со средним 72 мин и стандартным отклонением 9 мин. Маша для этой цели тратит время Y, нормально распределенное со средним 80 мин и стандартным отклонением 12 мин.

а) Чему равна вероятность того, что Аня будет ждать Машу?

б) Чему равна вероятность того, что девушки поедут в университет вместе?

в) На сколько минут позже Маши Аня должна выходить из дома, чтобы вероятность того, что ей придется ожидать Машу, была 0,05?

40. Случайная точка (X, Y) распределена по нормальному закону с параметрами $m_X = 1, m_Y = -1, \sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 4, \rho_{XY} = 0$. Найдите вероятность того, что случайная точка попадет внутрь области D, ограниченной эллипсом:

$$(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

41. Известно, что уровень дохода в некоторой социально-экономической группе населения имеет нормальное распределение со средним 30 условных денежных единиц (у. е.) и стандартным отклонением 6 у. е. (мы игнорируем исчезающе малую вероятность того, что нормальная случайная величина с такими параметрами принимает отрицательные значения). Уровень сбережений в этой группе также имеет нормальное распределение со средним 15 у. е. и стандартным отклонением 3 у. е. Можно считать, что и совместное распределение доходов и сбережений является нормальным, причем коэффициент корреляции между этими величинами равен 0,80.

а) При каком уровне дохода средняя величина сбережений (в подгруппе с этим уровнем дохода) не менее 20 у. е.?

б) Рассмотрим подгруппу с уровнем дохода 35 у. е. Какая доля населения в этой подгруппе имеет сбережения в интервале от 14 до 20 у. е.?

7. Функции случайных величин

Часто возникают задачи, когда необходимо найти закон распределения одной случайной величины, зная закон распределения другой, предполагая, что они связаны функционально. Если каждому значению одной случайной величины X соответствует одно определенное значение другой случайной величины Y, то случайная величина Y называется функцией одного случайного аргумента X, т. е. $Y = \varphi(X)$.

Если случайная величина X дискретная, то и случайная величина Y также дискретная. Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $x_i,\ i =$

$= 1,2, \dots, n$, с вероятностями p_i. Тогда случайная величина $Y = \varphi(X)$ будет принимать значения $y_i = \varphi(x_i)$ с вероятностями $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$.

Числовые характеристики случайной величины Y находятся по следующим формулам:

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i; \tag{7.1}$$

$$D(Y) = M\big(y - M(Y)\big)^2 = M(Y^2) - M^2(Y). \tag{7.2}$$

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана таблицей:

X	–1	1	2	3
p	0,1	0,3	0,5	0,1

Найти $M(Y)$, $D(Y)$ и $\sigma(Y)$, если $Y = 2X^2 + 1$.

Решение. Случайная величина Y примет значения:

$$y_1 = 2(-1)^2 + 1 = 3;$$

$$y_2 = 2(1)^2 + 1 = 3; y_3 = 2(2)^2 + 1 = 9; y_4 = 2(3)^2 + 1 = 19,$$

с теми же вероятностями, что и случайная величина X. Одинаковые значения случайной величины Y объединяются, а вероятности этих значений складываются:

$$(0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4).$$

Тогда закон распределения случайной величины Y имеет вид:

Y	3	9	19
p	0,4	0,5	0,1

$$M(Y) = 3 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}5 + 19 \cdot 0{,}1 = 7{,}6;$$

$$D(Y) = 3^2 \cdot 0{,}4 + 9^2 \cdot 0{,}5 + 19^2 \cdot 0{,}1 - 7{,}6^2 = 22{,}5; \ \sigma(Y) = 4{,}74.$$

Пусть имеется непрерывная случайная величина X с функцией плотности вероятности $f(x)$. Другая случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью: $Y = \varphi(X)$.

Случайная точка (X, Y) может находиться только на кривой $y = \varphi(X)$. Плотность вероятности случайной величины Y определяется при условии, что $\varphi(x)$ является монотонной функцией на интервале (a, b), тогда для функции $\varphi(x)$ существует обратная функция:

$$\varphi^{-1} = \psi, x = \psi(y).$$

Плотность распределения случайной величины Y находится по формуле

$$g(y) = f\big(\psi(y)\big)|\psi'(y)|. \tag{7.3}$$

Если случайная величина $Y = \varphi(X)$ имеет несколько промежутков монотонности, то числовая прямая разбивается на n промежутков монотонности и обратная функция находится на каждом из них, поэтому

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} f\big(\psi_i(y)\big)\, |\psi_i{}'(y)|. \tag{7.4}$$

Математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины Y — функции случайной величины X можно определить по формулам:

$$M(Y) = M\big(\varphi(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx, \qquad (7.5)$$

$$D(Y) = D\big(\varphi(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - M^2(Y). \qquad (7.6)$$

Пусть $\varphi(X)$ имеет кусочно-непрерывные первые производные по всем координатам вектора X и не постоянна ни на каком множестве значений аргумента X, имеющем отличную от нуля вероятность. Тогда плотность вероятности случайной величины $Y = \varphi(X)$ при $n = m$:

$$g(y) = f(\varphi^{-1}(y)|J(y)|, \qquad (7.7)$$

где f — функция плотности вероятности вектора X, $|J(y)|$ — абсолютная величина якобиана координат[2] вектора $X = \varphi^{-1}(Y)$ по координатам *вектора:*

$$\text{Y}: J(y) = \frac{\partial(\varphi_1^{-1}, \ldots, \varphi_n^{-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \qquad (7.8)$$

или

$$J(y) = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

($J(y)$ — это производная функции$\varphi^{-1}(Y)$ в случае скалярных X и Y).

Отсюда (*7.8*) *можно записать в виде функции распределения* Y*:*

$$G(y) = \int_D f(\varphi^{-1}(y)) \, |J(y)| \, dy, \qquad (7.9)$$

где D — область задания случайной величины Y.

Пример 2. По заданной функции плотности распределения $f(x_1, x_2)$ двумерной случайной величины $(X_1,\ X_2)$ найти плотность распределения $g(Y_1, Y_2)$ двумерной случайной величины (Y_1, Y_2), связанной взаимно однозначно с $(X_1,\ X_2)$ указанными ниже соотношениями:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot 3 \cdot 4} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{3^2} + \frac{x_2^2}{4^2}\right)},$$

$$X_1 = 3Y_1 \cos 2Y_2\,, X_2 = 4Y_1 \sin 2Y_2\,, 0 \le Y_1 < \infty\,, 0 \le\ Y_2 < \pi.$$

Решение. Из (7.7) следует, что плотность вероятности

$$g(y) = f(x_1,\ x_2)\left|J(y)\right|,$$

определена в области D, заданной неравенствами:

---

[2] $|J(y)|$ — коэффициент искажения или коэффициент растяжения пространства (в данной точке), задаваемого вектором X, при преобразовании его в пространство, задаваемое вектором Y (в двумерном случае плоскости x_1x_2 в плоскость y_1y_2).

$$0 \le Y_1 < \infty, 0 \le Y_2 < \pi.$$

Имеем:

$$J(y) = \begin{vmatrix} 3\cos 2y_2 & -6y_1 \sin 2y_2 \\ 4\sin 2y_2 & 8y_1 \cos 2y_2 \end{vmatrix} = 24y_1 \cos^2 2y_2 + 24y_1 \sin^2 2y_2 = 24y_1.$$

Отсюда

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi \cdot 3 \cdot 4} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3^2 y_1^2 cos^2 2y_2}{3^2} + \frac{4^2 y_1^2 sin^2 2y_2}{4^2}\right)} \cdot 24y_1,$$

$$g(y_1, y_2) = y_1 e^{-\frac{y_1^2}{2}} \frac{1}{\pi},$$

где $g_1(y_1) = y_1 e^{-\frac{y_1^2}{2}}$ — функция плотности вероятности закона Рэлея $0 \le Y_1 < \infty$, $g_2(y_2) = \frac{1}{\pi}$ — функция плотности вероятности равномерного закона вероятности $0 \le Y_2 < \pi$.

1. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	0	1	4
p	0,3	0,5	0,2

Найти закон распределения случайной величины Y, где:

а) $Y = 2X - 1$;

б) $Y = X + 5$;

в) $Y = X^2 - 2$;

г) $Y = \sqrt{X}$.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–2	–1	0	1
p	0,2	0,4	0,1	0,3

Найти закон распределения случайной величины Y, где:

а) $Y = 2X + 1$;

б) $Y = X^3 - 1$;

в) $Y = X^2$;

г) $Y = \sqrt{X + 2}$.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	4	5
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y, если:

а) $Y = 4X - 4$;

б) $Y = X^2$.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
p	0,2	0,7	0,1

Найти:

а) закон распределения случайной величины $Y = \sin^2 X$;

б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y.

5. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины:

а) $Y = \sin X$;

б) $Y = \cos X$.

6. Случайная величина X распределена нормально с параметрами $a = 2$, $\sigma = 1$. Найти плотность распределения случайной величины:

а) $Y = 2X + 6$;

б) $Y = X^3$.

7. Сторона квадрата X имеет равномерное распределение на отрезке [1; 2]. Найти функцию плотности распределения площади квадрата.

8. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины:

а) $Y = X^3$;

б) $Y = 3X$.

9. Независимые случайные величины X и Y распределены равномерно. Случайная величина X распределена в интервале (0; 2), а случайная величина Y — в интервале (0; 10). Найти функцию и плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$. Построить графики функций случайной величины Z.

10. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-4;\ 1)$, а случайная величина Y — в интервале $(1;\ 6)$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$ и начертить ее график.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы функциями: $f_1(x) = e^{-x}$ при $0 \le x < \infty$, $f_2(y) = 0{,}5e^{-0{,}5y}$ при $0 \le y < \infty$.

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

12. Независимые случайные величины X и Y распределены по нормальному закону:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}},\, f_2(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$. Показать, что случайная величина Z распределяется по нормальному закону.

13. Натуральный логарифм некоторой случайной величины X распределен по нормальному закону с центром рассеивания α и средним квадратическим отклонением σ. Найти плотность распределения случайной величины X.

14. По заданной плотности распределения $f(x_1,\ x_2)$ двумерной случайной величины (X_1, X_2) найти плотность распределения $f(y_1,\ y_2)$ двумерной случай-

ной величины (Y_1, Y_2), связанной взаимно однозначно с $(X_1,\ X_2)$ указанными ниже соотношениями:

$$1)\ f(X_1, X_2) = \frac{1}{12\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_1^2}{4}+\frac{X_2^2}{9}\right)},$$

где $X_1 = 2Y_1 \cos 2Y_2$, $X_2 = 3Y_1 \sin 2Y_2$, $0 \leq Y_1 < \infty, 0 \leq Y_2 < \pi$.

$$2)\ f(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi^2(x_1^2+4)(x_2^2+9)},$$

где $X_1 = 2\mathrm{tg}\, 2Y_1,\ X_2 = 3Y_1 \mathrm{tg}\, 2Y_2, |Y_1| < \frac{\pi}{4}, |Y_2| < \frac{\pi}{4}$.

15. Пусть случайные величины $Y_1,\ Y_2$ независимы и равномерно распределены на (0; 1). Показать, что если рассмотреть преобразование

$$X_1 = \sqrt{-2lnY_1} \cos(2\pi Y_2)\,, X_2 = \sqrt{-2lnY_1} \sin(2\pi Y_2),$$

то случайные величины (X_1, X_2) независимы и подчиняются стандартному нормальному закону распределения: $X_1, X_2 \rightarrow\ N(0, 1)$.

16. Равнобедренный треугольник образован единичным вектором в направлении оси абсцисс и единичным вектором в случайном направлении. Найти функцию распределения длины третьей стороны в:

а) R^2;

б) R^3.

17. На отрезок оси ординат между точками (0,0) и (0, R) наудачу брошена точка. Через точку попадания проведена хорда окружности $x^2 + y^2 = R^2$, перпендикулярная оси ординат. Найти распределение длины этой хорды.

18. Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, найти распределение площади круга.

19. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и b^2. Доказать, что случайная величина $\eta = \frac{X-a}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение.

20. Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найти плотность распределения тангенса X.

21. Пусть случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения F. Найти функцию распределения случайной величины $Z = -ln\mathrm{F}(X)$.

22. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ. Найдите плотность распределения случайных величин:

а) $Y_1 = X^2$;

б) $Y_2 = \sqrt{X}$;

в) $Y_3 = lnX$;

г) $Y_4 = 1 - \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{X}}$.

23. Случайная точка A имеет равномерное распределение в круге радиуса R. Найдите математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки A до центра круга.

24. Случайная точка A равномерно распределена на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$. Случайная величина X — это проекция точки A на ось OY. Найдите:

а) функцию и плотность распределения случайной величины X;

б) среднее значение, дисперсию случайной величины X.

25. Время безотказной работы некоторой микросхемы имеет нормальное распределение со средним 18 мес. и стандартным отклонением 3 мес. Прибор содержит шесть таких однотипных микросхем. Чему равна вероятность того, что за два года работы не менее четырех микросхем выйдет из строя (повторные отказы не учитывать)?

26. Предприятие получает однотипные микросхемы от двух поставщиков. Время безотказной работы микросхем имеет показательное распределение. Первый поставщик обеспечивает 30% потребности предприятия, и поставляемые им микросхемы имеют среднее время безотказной работы 80 ч. Второй поставщик обеспечивает 70% потребности предприятия, и поставляемые им микросхемы имеют среднее время безотказной работы 90 ч. Найдите среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение времени безотказной работы микросхем на предприятии.

27. Случайная величина Y называется *логарифмически нормальной* с параметрами m, σ^2 , если $X = lnY \sim N(m, \sigma^2)$. Найдите:

а) плотность распределения случайной величины Y;

б) $M(Y)$.

28. Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$. Докажите, что $M(\mathrm{X}) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X \geq x)dx - \int_{-\infty}^0 P(X \leq x)dx$, в предположении, что математическое ожидание $M(X)$ существует.

29. Население региона разбито на три социально-экономические группы по уровню дохода. Расход на питание в i-й группе можно считать нормальной случайной величиной с параметрами $(m_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, 3.$ (Мы игнорируем исчезающе малую вероятность отрицательных значений.) Численности групп относятся как 2:5:3 и $m_1 = 8,\ \sigma_1 = 2, m_2 = 15, \sigma_2 = 4, m_3 = 20, \sigma_3 = 6$. Найдите:

а) среднее значение и среднеквадратическое отклонение расходов на питание в регионе;

б) долю населения региона, чьи расходы на питание лежат в диапазоне от 10 до 18.

30. Старый автобус курсирует между пунктами A и B, расстояние между которыми равно 100 км. Автобус ломается в точке, равномерно распределенной на всем пути, т. е. на отрезке $[0,100]$. Станции обслуживания автобусов расположены в пунктах A, B и в середине пути между A и B. С целью повышения эффективности обслуживания было предложено расположить эти три станции на расстоянии 25, 50 и 75 км от пути пункта A. Согласны ли вы с этим решением?

31. Продолжительность жизни в некотором регионе имеет стандартное отклонение 14 лет. Чему равна средняя продолжительность жизни, если 30% жителей этого региона имеют возраст более 75 лет? Предполагается, что продолжительность жизни имеет нормальное распределение.

32. Ежегодный уровень осадков (в см) в некотором регионе является нормальной случайной величиной с параметрами $m = 40, \sigma^2 = 16$ (мы игнорируем исчезающе малую вероятность того, что случайная величина с такими параметрами может принимать отрицательные значения). Предполагая, что осадки в разные годы независимы, найдите вероятность того, что, начиная с нынешнего года, придется ждать не менее 10 лет, когда впервые ежегодный уровень осадков превысит 50 см.

33. Супермаркет получает яблоки от трех поставщиков. Яблоки, поступившие от первого поставщика, имеют средний вес 130 г и стандартное отклонение 10 г, от второго — 140 и 12 г, от третьего — 150 и 15 г соответственно. Доли первого, второго и третьего поставщиков в общей поставке равны соответственно 30, 50 и 20%. Предполагается, что вес яблок у каждого поставщика нормально распределен.

а) Найдите среднее значение и стандартное отклонение веса яблок, продаваемых в супермаркете.

б) Какую долю составляют яблоки, вес которых не превышает 135 г?

34. Студент A сообщает студенту B значение X случайной величины, равномерно распределенной на отрезке [0, 2]. Студент B подбрасывает неправильную монету, у которой орел при однократном подбрасывании выпадает с вероятностью 1/3. Если выпадает орел, то студент B возводит X в квадрат, а если выпала решка, то он прибавляет к X единицу. Обозначим полученное число Y. Найдите:

а) плотность распределения случайной величины Y;

б) $M(Y), D(Y)$.

35. Двумерный случайный вектор $[X, Y]'$ распределен равномерно в круге $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$. Найдите совместное распределение полярного радиуса r и полярного угла φ вектора $[X, Y]'$.

8. Закон больших чисел

Лемма Чебышёва (Маркова). Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание $M(X)$, то для любого $t > 0$ имеет место неравенство

$$P(X \geq t) \leq \frac{M(X)}{t}. \tag{8.1}$$

Неравенство Чебышёва. Если случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P(|x - M(x)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{8.2}$$

Следствие 1. Если произведено n независимых испытаний по схеме Бернулли, где p — вероятность успеха, q — вероятность неудачи, n — число опытов, k — число успехов, то вероятность того, что абсолютное отклонение числа появления события A в независимых испытаниях от $M(X) = np$ будет меньше некоторого положительного числа ε, не менее $1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}$:

$$P(|k-np|<\varepsilon)\geq 1-\frac{npq}{\varepsilon^2}. \qquad (8.3)$$

Следствие 2. Для относительной частоты появления события в независимых испытаниях $\left(\frac{k}{n}\right)$ аналогичное неравенство имеет вид:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (8.4)$$

Теорема Чебышёва. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ — последовательность попарно независимых случайных величин, дисперсии каждой из которых ограничены сверху числом C, то каково бы ни было постоянное число $\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1. \qquad (8.5)$$

Следствие 1. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих одинаковые математические ожидания ($M(X_i)=a$) и равномерно ограниченные дисперсии, то как бы ни было мало постоянное число $\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (8.6)$$

Следствие 2 (теорема Бернулли). Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, а число испытаний достаточно велико, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что относительная частота события будет сколь угодно мало отличаться от постоянной вероятности:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (8.7)$$

Следствие 3 (теорема Пуассона). Если в последовательности независимых испытаний вероятность появления события A в i-м испытании равна p_i, $i=1,2,3,\dots,n$, а число испытаний достаточно велико, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что относительная частота события A будет сколь угодно мало отличаться от среднего арифметического вероятностей p_i:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n}-\frac{p_1+p_2+\dots+p_n}{n}\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (8.8)$$

Пример 1. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что при подбрасывании 12 игральных костей сумма очков на верхних гранях отклонится от математического ожидания менее чем на 15.

Решение. X_i — случайная величина — число очков на i-й кости ($i=1, 2, \dots, 12$). Тогда $X=X_1+X_2+\dots+X_{12}$, где X — сумма числа очков при подбрасывании 12 игральных костей.

Случайная величина X_i имеет закон распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Так как кости одинаковы, то $M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_{12})$,

$$D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_{12}).$$

$$M(X_1) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}, M(X_1^2) =$$
$$= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6},$$

$$M(X) = 3{,}5 \cdot 12 = 42, D(X_1) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}, D(X) = \left(\frac{35}{12}\right)12 = 35.$$

Согласно неравенству Чебышёва имеем

$$P(|X-42| < 15) \geq 1 - \frac{35}{225},$$

$$P(|X-42| < 15) \geq 0{,}844.$$

Понятие о центральной предельной теореме

Теорема 1 (Муавра — Лапласа). Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p (ненаступления $q = 1 - p,\ p \neq 0,\ p \neq 1$). Если K — число появлений события A в серии из n испытаний, то при достаточно больших n случайную величину K можно считать нормально распределенной:

$$M(K) = np, \sigma(K) = \sqrt{D(K)} = \sqrt{npq}:$$

$$: P(K < k) \to P(X < x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \varphi(x)dx = \frac{1}{2} + \Phi(x_0), \tag{8.9}$$

где $x_0 = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \Phi(x_0)$ — функция Лапласа.

Теорема 2 (Линденберга — Леви). Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, то при $n \to \infty$:

$$P\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n-na}{\sigma\sqrt{n}} < t\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \tag{8.10}$$

где $M(X_i) = a,\ \sigma^2 = D(X_i)$; $\frac{\sum X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} = U$ — нормально распределенная случайная величина, $M(U) = 0, D(U) = 1$.

Пример 2. На отрезке [0; 1] случайным образом выбрано 100 чисел, точнее, рассматриваются 100 независимых средних $X_1, \dots, X_n$, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Найти вероятность того, что их сумма заключена между 51 и 60, т. е. $P(51 \leq \sum X_i \leq 60)$.

Решение. В силу теоремы 2:

$\sum X_i = \sigma\sqrt{n}U + na$.

Кроме того, линейная комбинация случайных величин, подчиняющихся нормальному закону, будет подчиняться нормальному закону. У нас полагается, что $U \to N(0, 1)$, следовательно, $\sum X_i \to N(na, n\sigma^2)$.

Из условия в силу равномерности случайной величины X_i:

$$M(X_i) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \sigma^2 = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Следовательно,

$$M(\sum X_i) = 50, D(\sum X_i) = \frac{100}{12}.$$

Итак, $\sum X_i \to N\left(50, \frac{100}{12}\right)$ — сумма, нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием $M(\sum X_i) = na = 50$ и дисперсией $D(\sum X_i) = n\sigma^2 = \frac{100}{12}$.

Отсюда

$$P(51 \le \sum X_i \le 60) = \Phi\left(\frac{60-na}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{51-na}{\sqrt{n}\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{60-50}{\frac{10}{\sqrt{12}}}\right) - \Phi\left(\frac{51-50}{\frac{10}{\sqrt{12}}}\right) = \Phi(\sqrt{12}) - \Phi\left(\frac{\sqrt{12}}{10}\right) =$$

$$= \Phi(3{,}464) - \Phi(0{,}3464) \approx 0{,}49971 - 0{,}1353 = 0{,}3644.$$

То есть вероятность того, что сумма 100 независимых средних $X_1, X_2, ..., X_n$, равномерно распределенных на отрезке [0; 1], заключена между 51 и 60, равна 0,3644.

1. Количество кормов, расходуемых на ферме крупного рогатого скота в сутки, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 6 т. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход кормов на ферме превысит 10 т.

2. Количество электроэнергии, потребляемой поселком в течение суток, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 4 тыс. кВт/ч. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки потребление энергии:

а) превысит 8 тыс. кВт/ч.;

б) не превысит 6 тыс. кВт/ч.

3. Пользуясь неравенством Чебышёва, оценить вероятность того, что из посеянных 5000 семян число взошедших окажется от 3750 до 4250, если известно, что $M(X) = 4000$. Определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

4. Вероятность вызревания семян овощной культуры в данной местности составляет 0,8. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что из 1000 растений число растений с вызревшими семенами составит от 750 до 850. Определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

5. В хозяйстве имеется 100 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них в течение определенного периода составляет 0,9. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что отклонение числа бе-

зотказно работавших автомобилей за определенный период от его математического ожидания не превзойдет по модулю 5.

6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	6	9
p	0,1	0,4	0,3	0,2

Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| > 3$.

7. Величина X задана законом распределения:

X	–1	0	1	3	5
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 2{,}5$.

8. Всхожесть семян некоторого растения составляет 90%. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что из посеянных 5000 семян:

а) отклонение доли взошедших семян от постоянной вероятности взойти каждого из них не превзойдет по модулю 0,03;

б) отклонение числа взошедших семян от математического ожидания не превзойдет по модулю 100.

9. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a, \\ \dfrac{(x-a)^2}{a^2} \text{ при } a < x \le 2a, \\ 1 \text{ при } x > 2a. \end{cases}$$

а) С помощью неравенства Чебышёва, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < \frac{a}{2}$.

б) Определить вероятность того, что $|X - M(X)| < \frac{a}{2}$.

10. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{4a^2} \text{ при } 0 < x \le 2a, \\ 1 \text{ при } x > 2a. \end{cases}$$

а) используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < a$;

б) определить вероятность того, что $|X - M(X)| < a$.

11. Выборочным способом определяют вес колосьев ячменя. Сколько необходимо отобрать колосьев, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, можно было утверждать, что средний вес случайно отобранных колосьев будет отличаться от среднего веса колосьев во всей партии (принимаемого за математическое ожидание) не более чем на 0,1 г? Установлено, что среднее квадратическое отклонение веса не превышает 0,2 г.

12. Сколько человек необходимо отобрать для определения удельного веса лиц со специальным образованием, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что отклонение относительной частоты лиц со специальным образованием от их доли, принимаемой за постоянную вероятность, не превышало по модулю 0,04?

13. В результате анализа торговой деятельности некоторого магазина установлено, что среднемесячные издержки обращения составляют 300 усл. ден. ед. Оцените вероятность того, что в очередном месяце издержки не выйдут за пределы 280–320 денежных единиц. Известно, что дисперсия издержек равна 16 ден. ед.

14. Для определения средней урожайности на площади 100 000 га взято на выборку по одному гектару от каждого участка размером 100 га. Определите вероятность того, что средняя выборочная вероятность будет отличаться от действительной средней по всей площади не более чем на 0,5 ц, если дисперсия урожайности на отдельных участках (по 100 га) не превышает 2 ц.

15. На отрезке [0; 1] случайным образом выбрано 100 чисел, точнее, рассматриваются 100 независимых средних $X_1, X_2, \ldots, X_n$, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Найти вероятность того, что их сумма заключена между 21 и 51, т. е. $P(21 \leq \sum X_i \leq 51)$.

16. Пусть ε_n принимает значение $\sqrt{n}, -\sqrt{n}$ и 0 с вероятностями $\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}$ и $1-\frac{1}{n}$ соответственно. Будет ли выполнен закон больших чисел для последовательности $\{\varepsilon_n\}$?

Указание. Требуется проверить три условия для случайных величин последовательности: попарная независимость, конечность математических ожиданий, ограниченность дисперсий.

17. Пусть ε_n принимает значения $n, -n$ и 0 с вероятностями:

а) $\frac{1}{2n}^2, \frac{1}{2n}^2$ и $1-\frac{1}{n^2}$; б) 1/4, 1/4 и 1/2;

в) $\frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{n}}$ и $1-\frac{1}{\sqrt{n}}$; г) $2^{-n}, 2^{-n}$ и $1-2^{-n+1}$.

Выполнен ли закон больших чисел для последовательности $\{\varepsilon_n\}$?

18. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2x, \text{если } x \in (0,1), \\ 0, \text{если } x \notin (0,1). \end{cases}$$

Найдите предел по вероятности $P(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln\xi_1 + ln\xi_2 + \ldots + ln\xi_n}{n})$.

Указание. Случайные величины независимы и одинаково распределены, поэтому в силу закона больших чисел

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{ln\xi_1 + ln\xi_2 + \ldots + ln\xi_n}{n}) = M(ln\xi_i) = \int_0^1 lnx f(x)dx.$$

19. Интеграл $J = \int_0^1 e^x dx$ вычисляется методом Монте-Карло, т. е. разыгрывается n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$, и интервал J оценивается величиной $J_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{X_i}$. Найдите число n так, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, величина J_n отличалась от J не более чем на $\varepsilon = 0{,}02$.

20. Вычисление интеграла $J = \int_0^1 x^2 dx$ произведено методом Монте-Карло на основании 500 независимых опытов. Оцените вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины J не превзойдет 0,01.

21. С 1871 по 1900 г. в Швейцарии родились 1 359 671 мальчик и 1 285 086 девочек. Совместимы и эти данные с предположением, что вероятность рождения мальчика равна:

а) 0,5;

б) 0,515?

22. Складывается 10^4 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-m} (m — натуральное число).

а) Предполагая, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-0{,}5 \cdot 10^{-m}, 0{,}5 \cdot 10^{-m})$, найдите пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет лежать суммарная ошибка.

б) При каком m граница ошибки в а) не превосходит 0,1?

23. Допустим, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Какова вероятность того, что в группе из 10 000 новорожденных мальчиков будет по крайней мере на 200 больше, чем девочек?

24. Планируя свою деятельность по одному из видов рискового страхования со средним размером страховой суммы 1000 руб., вероятностью наступления страхового случая 0,05 и ожидаемым количеством договоров 1200, страховая компания желала бы получить доход не менее 100 000 руб. Какова должна быть минимальная величина страхового тарифа, чтобы компания могла получить указанный размер дохода с вероятностью не менее 0,99.

25. Чему равна вероятность того, что при подбрасывании правильной монеты 10 раз выпадает не менее семи орлов? Получите ответ тремя способами:

а) точно, используя биномиальное распределение;

б) приближенно, используя нормальное приближение;

в) приближенно, используя нормальное приближение с поправкой на непрерывность.

26. Первого марта в большой теплице было установлено 1000 ультрафиолетовых ламп. Время работы каждой лампы имеет нормальное распределение со средним 100 дней и стандартным отклонением 25 дней.

а) Чему равно среднее значение числа ламп, которые один раз заменили до 1 июня (92 дня)?

б) Чему равна вероятность того, что более 400 ламп один раз будут заменены до 14 июня?

27. Случайная величина X имеет распределение $X^2(50)$. Найдите вероятность $P(40 < X < 60)$:

а) точно (например, с помощью *Excel*);

б) приближенно, используя центральную предельную теорему.

9. Цепи Маркова

Результаты различных экспериментов или испытаний могут быть представлены в виде определенной последовательности букв или цифр, которые рассматриваются как процессы перехода от одного состояния в другое. Можно оценить вероятность такого перехода. Модель случайного процесса объединяет множество состояний и множество вероятностей перехода из одного состояния в другое.

Множество (пространство) состояний (S_m) может быть конечным и бесконечным. Последовательность состояний образует цепь Маркова, если в отдельном испытании система принимает одно из возможных состояний, не зависящее от результатов ранее произведенных испытаний.

Вероятность $P_{ij}(S)$ есть условная вероятность перехода случайного процесса из состояния S_i в состояние S_j за один шаг. Так как она не зависит от номера испытания, то может обозначаться через P_{ij}. Первый индекс указывает номер предшествующего, а второй — последующего состояния. Если известны вероятности для любой пары состояния, то они могут быть представлены квадратной матрицей перехода $P_1 = \left|P_{ij}\right|$, где P_{ij} — элемент (вероятность), стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца.

$$\sum P_{ij} = 1, (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, k). \tag{9.1}$$

Вероятность перехода процесса из состояния S_i в состояние S_j за n шагов обозначается $P_{ij}^{(n)}$, а квадратная матрица всех этих вероятностей обозначается P_n.

Матрица перехода за три шага $P_3 = P_1^3$ и за n шагов:

$$P_n = P_1^n. \tag{9.2}$$

Вероятности состояний после k-го шага вычисляются по формуле полной вероятности:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1)\, P_{ji}^{(k)}, i = 1, 2, \dots, n. \tag{9.3}$$

Пример 1. По некоторой цели производятся выстрелы в моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots$ Возможные состояния системы (цели):

— S_1 — цель невредима;

— S_2 — цель повреждена (но может функционировать);

— S_3 — цель полностью поражена (не может функционировать).

Граф состояний представлен на рисунке 9.1.

Матрица переходных вероятностей:

$$(P) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.4}$$

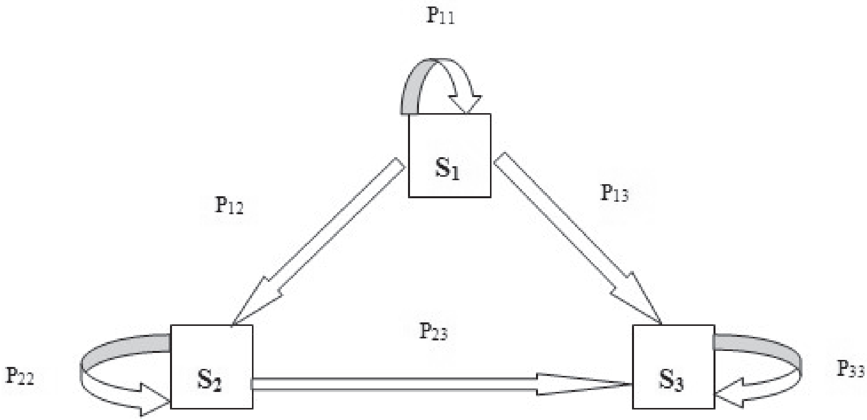


Рис. 9.1 — Граф состояний системы (цели)

Сколько надо сделать выстрелов, чтобы вероятность поражения цели оказалась не менее 0,6?

Решение. До того как начались выстрелы, система (цель) находилась в состоянии s_1. После первого выстрела (после первого шага) вероятности состояний системы определяются из первой строки матрицы (9.4):

$$p_1(1) = 0{,}1, p_2(1) = 0{,}7, p_3(1) = 0{,}2. \qquad (9.5)$$

Таким образом, после первого выстрела вероятность полного поражения цели составляет 0,2.

Делаем второй шаг (второй выстрел). Используя формулы (9.3) и (9.4), последовательно находим:

$$p_1(2) = p_1(1)P_{11} + p_2(1)P_{21} + p_3(1)P_{31} = \\ = 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0 + \ 0{,}2 \cdot 0 = 0{,}01;$$

$$p_2(2) = p_1(1)P_{12} + p_2(1)P_{22} + p_3(1)P_{32} = \\ = 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 + \ 0{,}2 \cdot 0 = 0{,}49;$$

$$p_3(2) = p_1(1)P_{13} + p_2(1)P_{23} + p_3(1)P_{33} = \\ = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 + \ 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}5.$$

Видим, что вероятность поражения цели теперь равна 0,5.

Делаем третий шаг (третий выстрел). Используя (9.3), (9.4) и полученные безусловные вероятности, находим:

$$p_1(3) = p_1(2)P_{11} + p_2(2)P_{21} + p_3(2)P_{31} = \\ = 0{,}01 \cdot 0{,}1 + 0{,}49 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0 = 0{,}001;$$

$$p_2(3) = p_1(2)P_{12} + p_2(2)P_{22} + p_3(2)P_{32} = \\ = 0{,}01 \cdot 0{,}7 + 0{,}49 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0 = 0{,}301;$$

$$p_3(3) = p_1(2)P_{13} + p_2(2)P_{23} + p_3(2)P_{33} = \\ = 0{,}01 \cdot 0{,}2 + 0{,}49 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}698.$$

Мы видим, что вероятность поражения цели равна теперь 0,698, т. е. больше 0,6. Значит, требуется сделать не меньше трех выстрелов, чтобы вероятность поражения цели превысила 0,6.

1. Вероятности перехода за один шаг в цепи Маркова задаются матрицей P. Найти число состояний системы. Построить граф, соответствующий матрице P.

$$\text{а) } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \text{ б) } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Задана матрица вероятностей переходов

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix}.$$

Каковы пределы изменений α и β?

3. В урне имеется 5 белых и черных шаров. Из урны случайно извлекается один шар, а обратно в урну возвращается один шар другого цвета. Опыт повторяется неоднократно. Найти матрицу переходных вероятностей, состояниями которой является количество белых шаров в урне. Найти вероятности перехода за два шага.

4. Построить матрицу вероятностей перехода для марковской цепи, описывающей варианты получения образования в Краснодарском крае. 90% детей выпускников КубГАУ поступают в КубГАУ, а остальные в КубГТУ. 50% детей выпускников КГУ поступают в КГУ, остальные распределяются поровну между КубГАУ и КубГТУ. 70% детей выпускников КубГТУ поступают в КубГТУ, 20% — в КубГАУ, 10% — в КГУ. Построить вероятностное дерево и найти матрицу оценки состояний для внука выпускника КубГАУ.

5. Игральная кость перекладывается многократно с равной вероятностью случайным образом с одной грани на любую из соседних четырех граней, независимо от исхода предыдущего испытания. К какому пределу стремится при $t \to \infty$ вероятность того, что в момент времени t игральная кость лежит на грани «5», если в момент времени $t = 0$, она находится в этом же положении?

6. Имеется пять стульев, расположенных один после другого. Человек пересаживается с одного стула на рядом стоящий, причем эти перемещения определяются бросанием правильной игральной кости. Стулья обозначены буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Вначале он сидит на среднем стуле *C*. Если человек сидит на крайнем стуле, то: возвращается на стул *C*, когда выпадет четное число очков; остается на том же месте при выпадении нечетного числа очков. Если он сидит не на крайнем стуле, то: перемещается налево при выпадении одного или двух очков; перемещается направо при выпадении трех или четырех очков; остается на том же месте при выпадении пяти или шести очков. Найти:

а) матрицу вероятностей переходов за один шаг;

б) вероятности следующих последовательностей: *C*, *D*, *E*, *C*, *D*, *A*, *C*; *C*, *B*, *D*, *E*, *E*, *A*; *C*, *B*, *A*, *A*, *C*, *D*; *C*, *D*, *E*, *C*, *E*, *C*; *A*, *A*, *C*, *D*, *E*, *E*.

7. Студент для получения профессионального образования обучается в колледже в течение трех лет. Ежегодно он сдает комплексный экзамен. Если

студент успешно сдаст экзамен, то он переводится на следующий курс или оканчивает колледж с дипломом специалиста. Если студент экзамен не сдает, то он остается на соответствующем курсе второй год. Вероятность успешной сдачи экзамена на первом году обучения составляет 0,7; на втором — 0,8; на третьем — 0,9.

а) Указать подходящее число состояний системы;

б) найти матрицу вероятностей перехода за один шаг для ежегодных передвижений студента по курсам (первый, второй, третий год обучения, окончание колледжа);

в) определить вероятность, что студент будет обучаться на третьем курсе после сдачи второго экзамена;

г) определить среднее число лет, которые студент проводит в колледже.

8. (*Задача для исследования.*) Изучение клиентской базы компании позволило выделить шесть основных групп клиентов[3] (рис. 9.2).

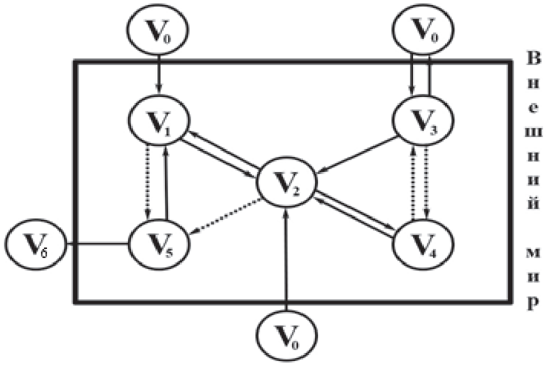


Рис. 9.2 — Структура клиентской базы

V_1 — рядовые покупатели, покупатели профильных товаров и услуг (32,6%), V_2 — плательщики, покупатели с высокой частотой использования услуг (6,2%), V_3 — средний класс, пассивные покупатели, появляющиеся в среднем раз в год (1,3%), V_4 — приверженцы, покупатели, пользующиеся услугами компании два раза в неделю (0,8%), V_5 — спящие, обращающиеся примерно раз в три года (20,2%), V_6 — случайные прохожие, без повторных покупок (38,9%).

Кроме того, регулярно происходит обновление базы компании за счет V_0 — клиентов «внешнего мира» — часть клиентов приходит, а часть уходит во внешний мир. Какой может быть матрица еженедельных переходов, если известно, что все клиенты уходят в течение одного квартала. Предложите, опираясь на собственные субъективные оценки, вариант матрицы переходов и исследуйте его, например, с использованием *Mathcad*.

9. Пусть фирма регулярно оценивает положение сбыта продукции и дает ему удовлетворительную (состояние 1) или неудовлетворительную оценку (состояние 2). Требуется принять решение о необходимости рекламы для улучшения сбыта. Имеются матрицы переходных вероятностей с рекламой (P_1) и без (P_2) и соответствующие матрицы доходов (R_1) и (R_2) в течение месяца:

---

[3] По результатам диссертационного исследования А. В. Андреевой «Динамическая модель управления клиентской базой компании на основе марковских цепей»: https://www.hse.ru/sci/diss/89849345.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix},$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальные решения на три месяца вперед.

10. Приложения теории вероятностей в компьютерных науках (computer science)

Для решения сложных задач не всегда подходят точные методы, которые часто и разработать невозможно. Поэтому используют различные приближенные методы. Причем наиболее эффективными из них являются методы, использующие случайные числа.

Сегодня достаточно много информационных систем, поддерживающих идеологию имитационного моделирования (метод Монте-Карло), например *Matlab Simulink, AnyLogic.* Для понимания идеи метода можно рассмотреть в пакете анализа *Excel* опцию *генерация случайных чисел*, которая заполняет диапазон случайными числами, заданными по одному из законов: равномерному; нормальному; Бернулли; биномиальному; Пуассона; модельному (позволяющему генерировать последовательности случайных чисел от *a* до *b* с шагом *c*, с возможностью повторения каждого числа и последовательности); дискретному (решающему задачу получения по имеющемуся распределению новых значений того же распределения).

Замечание. Инструмент генерации случайных чисел позволяет решать целый ряд задач: численных методов (например, приближённого вычисления определённых интегралов методом статистических испытаний — методом Монте-Карло, имитационного моделирования изучаемых процессов и т. д.).

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^1 x^2 dx$ методом Монте-Карло.

Решение. Вычисление определенного интеграла *I* равносильно нахождению площади D криволинейной трапеции функции $Y = f(x) = x^2$(рис. 10.1).

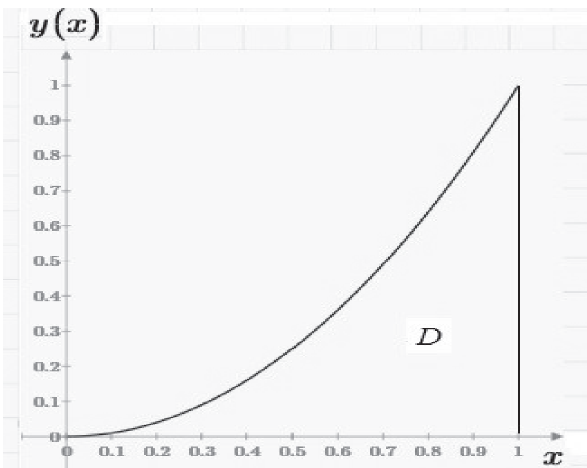


Рис. 10.1 — Область D

Рассмотрим систему двумерных равномерно распределенных случайных величин *(X, Y)* на интервале от 0 до 1. При достаточно большом числе опытов *N* площадь *D* будет приближенно равна относительной частоте попадания точек $M_i(x_i, y_i)$ в область *D* (в силу закона больших чисел):

$$I \approx \frac{n}{N}.$$

Для генерации системы двух равномерно распределенных на интервале от 0 до 1 случайных величин используем инструмент табличного процессора *MS Excel* — *Анализ данных* — *Генерация случайных чисел*. Заполним диалоговое окно для генерации 10 000 пар указанных случайных чисел (рис. 10.2).

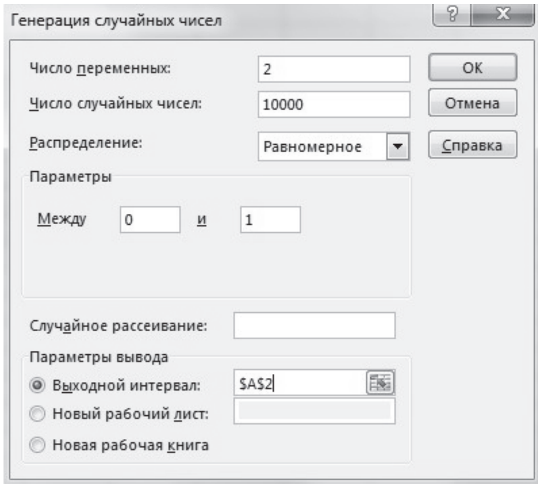


Рис. 10.2 — Диалоговое окно генерации двумерных, равномерно распределенных случайных величин

В результате в диапазоне $A1{:}B10001$ получим пары случайных чисел. В ячейке *C*2 введем формулу: $= A1\hat{}2$; в ячейке $D2$: $=$ Если $(B2 > C2;\ 0;\ 1)$. Последняя формула присваивает ячейке значение 0 $(m_i = 0)$, если точка M_i не попадает в область D и значение 1 $(m_i = 1)$ — в противном случае. Выделим диапазон *C*2:*D*2 и скопируем вниз до строки 10001. Найдем сумму значений в диапазоне *D*2:*D*10001, в результате получим, что $n = \sum m_i = 3334$ (рис. 10.3).

Отсюда

$$I \approx \frac{n}{N} = \frac{3334}{10\,000} = 0{,}3334.$$

Применяя неравенство Чебышёва, имеем

$$P\left(\left|\frac{n}{N} - I\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{I(1-I)}{\varepsilon^2 N} \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 N}.$$

Если мы зададим уровень значимости α, то неравенство, приведенное выше, всегда будет верно с гарантийной вероятностью $p = 1 - \alpha$ при

$$\alpha = \frac{1}{4\varepsilon^2 N}.$$

При заданных значениях ε и α можно определить необходимое число испытаний:

$$N = \frac{1}{4\varepsilon^2\alpha}.$$

В силу того, что неравенство Чебышёва дает нижнюю оценку вероятности, значение N будет завышено, например в нашем случае при $\varepsilon = 0{,}001$ и $\alpha = 0{,}01$: $N = 25\,000\,000$. Точнее значение $I = 0,(3)$.

`=ЕСЛИ(C2<B2;0;1)`

	A	B	C	D
1	x_i	y_i	$f(x_i)$	m_i
2	0,754264962	0,525162511	0,568915632	1
3	0,887874996	0,765312662	0,788322009	1
4	0,7612537	0,813959166	0,579507196	0
5	0,25840022	0,444837794	0,066770674	0
6	0,843073824	0,72460097	0,710773473	0
7	0,505233924	0,42628254	0,255261318	0
8	0,758354442	0,323679312	0,57510146	1
9	0,901730399	0,970091861	0,813117713	0
10	0,984160894	0,905087436	0,968572664	1
11	0,890957366	0,272621845	0,793805027	1
9997	0,472792749	0,810388501	0,223532983	0
9998	0,75942259	0,819513535	0,57672267	0
9999	0,040070803	0,308084353	0,001605669	0
10000	0,817926572	0,537919248	0,669003878	1
10001	0,556779687	0,68181402	0,31000362	0
10002	Итого			3334

Рис. 10.3 — Результат применения метода Монте-Карло

В рассматриваемом примере точность ε = 0,001 достигается уже при 10 000 испытаний. Существуют более точные методы оценки N[4], основывающиеся на предельных теоремах теории вероятностей.

1. Два стрелка сделали по n выстрелов по разным мишеням. Какова вероятность одинакового числа попаданий, если вероятность попадания каждого стрелка равна 0,5.

2. Найти производящие функции случайных величин для следующих законов распределения дискретных случайных величин: Бернулли, биномиального, геометрического, геометрического +1, отрицательного биномиального, Пуассона, гипергеометрического.

3. Игрок поочередно покупает билеты двух разных лотерей до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету первой лотереи составляет 0,2, а второй — 0,3. Игрок вначале покупает билет первой лотереи. Составить закон распределения и найти математическое ожидание случайной величины X — числа купленных билетов, если он имеет возможность купить:

[4] Демидович, Б. П., Марон, И. А. Основы вычислительной математики. — М. : Физматгиз. 1963.

а) только 5 билетов;

б) неограниченное число билетов.

4. Алгоритм M (нахождение максимума). Для данных n элементов x [1], $x[2]$, …, $x[n]$ необходимо найти такие величины m и j, что $m = x[j] = \max\limits_{1 \le i \le n} x[i]$, где j — наибольший индекс, удовлетворяющий этому соотношению (символ ← означает операцию присвоения, $j \leftarrow n$ означает, что переменной j присвоено значение n).

M 1. (Инициализация). Положим $j \leftarrow n$, $k \leftarrow n-1$, $m \leftarrow x[n]$.

(Во время выполнения алгоритма будем иметь $m = x[j] = \max\limits_{1 \le i \le n} x[i]$.)

M 2. (Все проверено?) Если $k = 0$, то работа алгоритма заканчивается.

M 3. (Сравнение.) Если $x[k] \le m$, перейти к шагу M 5.

M 4. (Замена m.) Положим $j \leftarrow k$, $m \leftarrow x[k]$. (Это значение m является новым текущим максимумом.)

M 5. (Уменьшение k.) Уменьшим k на единицу и вернемся к шагу M 2.

Оценить время выполнения алгоритма на конкретном компьютере.

5. Доказать, что 13 число месяца с большей вероятностью приходится на пятницу, чем на другие дни недели.

6. Вычислить определенный интеграл $4\int_0^2 x^3 dx$ методом Монте-Карло.

7. Рассмотрим алгоритм вычисления двух независимых нормально распределенных случайных величин X_1, X_2.

1) Сгенерируем случайные величины Z_1, Z_2, подчиняющиеся равномерному закону распределения, на [0;1]. Тогда случайные величины $Y_1 = 2Z_1-1$, $Y_2 = 2Z_2-1$ будут равномерно распределены на $[-1;1]$.

2) Присвоим S значение суммы квадратов Y_1, Y_2. $S \coloneqq Y_1^2 + Y_2^2$.

3) Если $S \ge 1$, то возврат на предыдущие этапы (1, 2).

4) Присвоим X_1 и X_2 значения:

$$X_1 \coloneqq Y_1\sqrt{-\frac{2\ln(S)}{S}},\ X_2 \coloneqq Y_2\sqrt{-\frac{2\ln(S)}{S}}.$$

Доказать, что X_1 и X_2 — нормально распределенные случайные величины.

8. Доказать, что на промежутках (0,1); (0,+∞); (−∞,+∞) законы распределения с наибольшей энтропией соответственно: равномерный, показательный ($M(X) = 1$) и нормальный ($M(X) = 0$, $D(X) = 1$).

Байесовские сети

Обобщение формулы Байеса на случай множества гипотез (H_1, H_2, ..., H_m) и множества свидетельств (E_1, E_2, …, E_n) для вероятности каждой из гипотез определяется по формуле

$$P = \left(H_i / E_1E_2...E_n\right) = \frac{P(E_1E_2...E_n / H_i)P(H_i)}{\sum_{k=1}^{m} P(E_1E_2...E_n / H_k)P(H_k)}$$

где $i = 1, 2, \dots, m$.

Используется предположение о *независимости свидетельств* (подход называют наивный Байес — *naive Bayes*).

9. Имеются три взаимно независимые состояния фирмы. Гипотезы:

H_1 — «средняя надежность фирмы»,

H_2 — «высокая надежность фирмы»,

H_3 — «низкая надежность фирмы».

Имеются два условно независимых свидетельства, в разной степени подтверждающих исходные гипотезы:

Вероятность	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$P(H_i)$	0,6	0,3	0,1
$P(E_1/H_i)$	0,3	0,7	0,2
$P(E_2/H_i)$	0,6	0,8	0,0

Условно независимые свидетельства, поддерживающие исходные гипотезы: E_1 — «наличие прибыли у фирмы», E_2 — «своевременный расчет с бюджетом». Найти вероятности гипотез после последовательного наступления свидетельств.

ЧАСТЬ II.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Дело не в цифрах… а в том, что вы с ними делаете.
М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт.Статистические выводы и связи

Математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. При этом статистическими данными называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.
А. Н. Колмогоров, Ю. В. Прохоров. Математическая энциклопедия. 1982

Статистика — это математическая теория, позволяющая познать мир через опыт.
В. Томпсон

Математическая статистика изучает задачи,
связанные с правилами индуктивного поведения.
Ю. Нейман

Основная идеология методов многомерного статистического анализа сводится к использованию теории алгебраических инвариантов, не изменяющихся при линейных преобразованиях (например, собственные значения, собственные векторы, определители, декомпозиция матриц, корреляция между переменными и т. д.).
Справочная система Statistica

— Законы статистики везде одинаковы, — продолжал Николай Петрович солидно. Утром, например, гостей бывает меньше, потому что публика ещё исправна; но чем больше солнце поднимается к зениту, тем наплыв делается сильнее. И, наконец, ночью, по выходе из театров — это почти целая оргия!
— И заметьте, — пояснил Семён Иванович, каждый день, в одни и те же промежутки времени, цифры всегда одинаковые. Колебаний — никаких! Такова незыблемость законов статистики!
М. Е. Салтыков-Щедрин. За рубежом

…нам пришлось потратить годы на то, чтобы самым тщательным образом проверить и перепроверить бесконечное множество рецептов и отобрать для вас самые лучшие, самые интересные, самые совершенные.
Теперь без тени сомнения мы можем сказать, что если вы будете следовать инструкциям, то каждое блюдо получится таким же, как и у нас, даже если вы никогда не занимались приготовлением пищи
Поваренная книга Мак-Колла

Кулинария — это искусство, благородная наука; все кулинары — джентльмены.
Тит Ливий
(*Дональд Кнут, Искусство программирования*)

…Э. Резерфорд, известный физик и директор лаборатории им. Кавендиша, набирая на работу новых сотрудников, задавал им два прямых вопроса: «Вы закончили университет с отличием?» и «Вы умеете считать?». Ответ «да» на оба вопроса был необходимым условием поступления на работу.
М. Я. Кельберт, Ю. М. Сухов

11. Вариационные ряды распределения

Ряд значений (вариант) признака, расположенных в порядке возрастания или убывания с соответствующими им весами (частотами или частостями), называется *вариационными рядом* (рядом распределения). *Частота* (n_i) показывает, сколько раз встречается тот или иной вариант (значение признака) в статистической совокупности. *Частость* (относительная частота) (w_i) показывает, какая часть единиц совокупности принимает определенное значение или из интервала значений. В дискретных рядах перечисляются возможные значения признака x_i.

Пример 1. В результате тестирования группа из 24 человек набрала баллы: 4, 0, 3, 4, 1, 0, 3, 1, 0, 4, 0, 0, 3, 1, 0, 1, 1, 3, 2, 3, 1, 2, 1, 2. Построить дискретный вариационный ряд.

Решение. Проранжируем исходный ряд, подсчитаем частоту и частость вариант: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4. Выполним в *MS Excel* команду *Данные — Анализ данных*[5] *— Гистограмма*, заполнив параметры диалогового окна (рис. 11.1), в результате получим дискретный вариационный ряд, дополним его относительными и накопленными частотами (табл. 11.1).

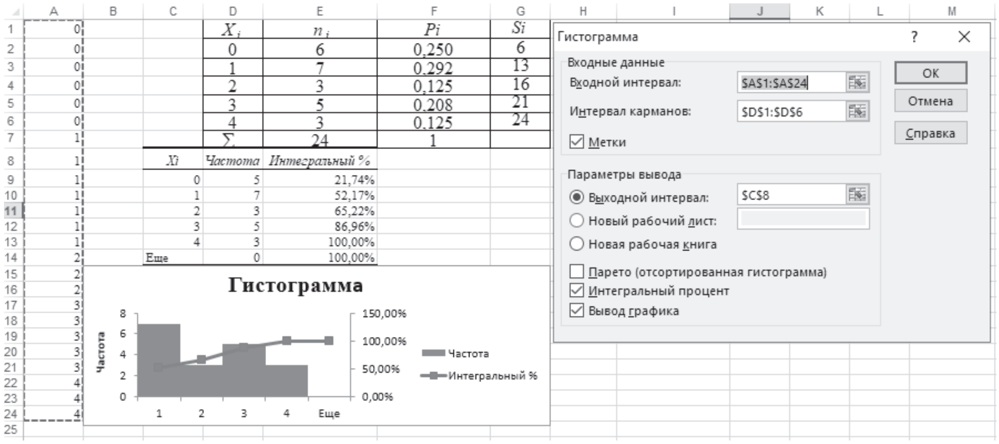


Рис. 11.1 — Диалоговое окно

Таблица 11.1

Ранжированный ряд успеваемости студентов

Балл, x_i	Число студентов, n_i	Относительная частота, $\hat{p}_i$
0	6	6/24
1	7	7/24
2	3	3/24
3	5	5/24
4	3	3/24
$\sum$	24	1

Мода и медиана в этом примере равны 1.

Вариационные ряды изображают графически с помощью полигона и гистограммы. Полигон частот — это ломаная, отрезки которой соединяют точки:

$$(x_1;n_1),(x_2;n_2),...(x_k;n_k).$$

[5] Для подключения пакета анализа выполнить команду *Файл — Параметры — Надстройки — Перейти* и установить надстройку *Анализ данных.*

Полигон относительных частот — это ломаная, отрезки которой соединяют точки:

$$(x_1; \tfrac{n_1}{n}), (x_2; \tfrac{n_2}{n}), \ldots (x_k; \tfrac{n_k}{n}).$$

Изобразим ряд графически. Для этого построим полигон частот с помощью мастера диаграмм, команда *Вставка — Диаграммы — Точечная с прямыми отрезками и маркерами* (рис. 11.2).

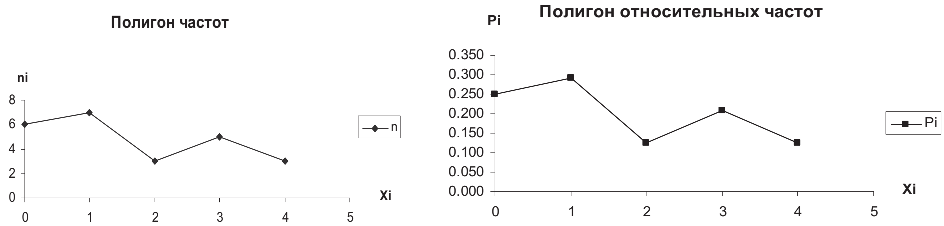


Рис. 11.2 — Графическое изображение вариационного ряда
(полигон частот и полигон относительных частот)

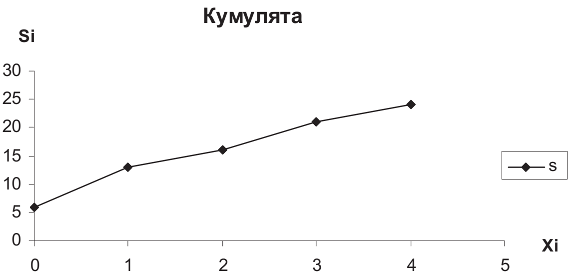


Рис. 11.3 — Кумулята

Пример 2. Пусть дан ряд распределения хозяйств по количеству рабочих на 100 га с.-х. угодий (n = 60):

12	6	8	6	10	11	7	10	12	8	7	7	6	7	8	6	11	9	11
9	10	11	9	10	7	8	8	8	11	9	8	7	5	9	7	7	14	11
9	8	7	4	7	5	5	10	7	7	5	8	10	10	15	10	10	13	12
11	15	6																

Построим интервальный вариационный ряд. Для определения числа групп подставим значение $n = 60$ в формулу Стерджесса: $k = 1 + 3{,}322 lg60 \approx 6{,}907$. Длину частичного интервала определим как $h = \frac{W}{k} = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{15-4}{7} \approx 1{,}6$. (В *MS Excel* автоматически считается $h = \frac{W}{\sqrt{n}}$.) Построим интервальный вариационный ряд, для этого в качестве начального значения используем x_{min}. Разобьем интервал вариации признака X на $k = 7$ частичных интервалов (табл. 11.2) с шагом $h = 1{,}6$ (4,0; 5,6; 7,2; 8,8; 10,4; 12,0; 13,6; 15,2). Далее подсчитаем количество рабочих на 100 га сельскохозяйственных угодий в каждом интервале с использованием инструмента *Гистограмма* пакета анализа (рис. 11.4).

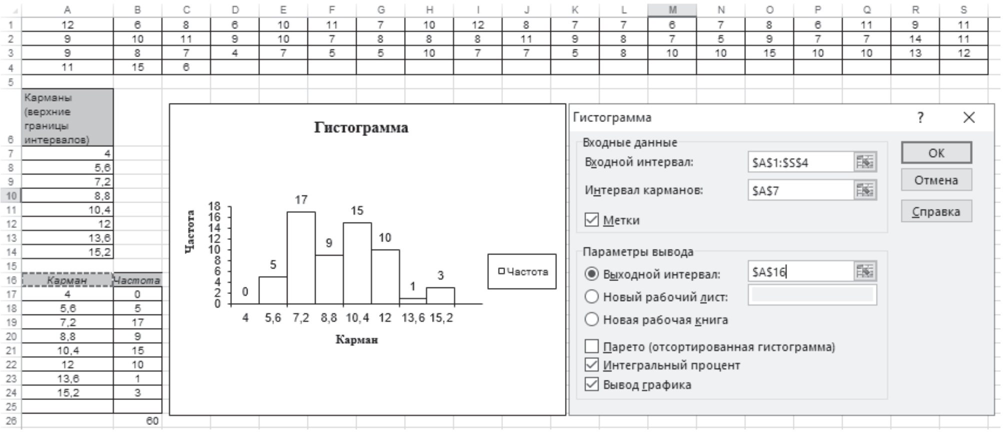


Рис. 11.4 — Подсчёт частот и построение гистограммы для интервального вариационного ряда

В результате получим статистическую группировку хозяйств по численности работников в расчете на 100 га сельскохозяйственных угодий (табл. 11.2).

Таблица 11.2

Группировка хозяйств по численности работников на 100 га сельхозугодий

Группы хозяйств по численности работников на 100 га с.-х. угодий	Число хозяйств в группе (n_i)	Накопленное число хозяйств (S_i)	Относительная частота ($\hat{p}_i$)
4,00–5,60	5	5	5/60
5,60–7,20	17	22	17/60
7,20–8,80	9	31	9/60
8,80–10,40	15	46	15/60
10,40–12,00	10	56	10/60
12,00–13,60	1	57	1/60
13,60–15,20	3	60	3/60
Итого	60	—	1,000

Рассчитаем моду и медиану (по формулам для интервального ряда):

$$M_o = x_{mo} + h\frac{n_{mo}-n_{mo-1}}{(n_{mo}-n_{mo-1})+(n_{mo}-n_{mo+1})} = 8{,}8 + 1{,}6\frac{15-9}{(15-9)+(15-10)} = 9{,}67. \quad (11.1)$$

$$M_e = x_{me} + h\frac{\frac{\sum n_i}{2} - S_{me-1}}{n_{me}} = 7{,}2 + 1{,}6\frac{30-17}{9} = 9{,}51, \quad (11.2)$$

где x_{mo} и x_{me} — нижние границы модального и медианного интервалов; h — величина интервалов; n_1, n_2, n_3 — соответственно частота интервала перед модальным, модального и после модального; S_{me-1} — накопленная частота интервала, предшествующего медианному интервалу. Найдем среднюю арифметическую и другие показатели вариационного ряда. Колеблемость признака характеризуется с помощью показателей вариации, к которым относятся: размах вариации, среднее линейное отклонение, среднее квадратическое отклонение.

Таблица 11.3

Вспомогательная таблица для расчета числовых характеристик ряда распределения

Группы хозяйств по численности работников на 100 га с.-х. угодий, чел.	Среднее значение интервала (x_i)	Число хозяйств в группе (n_i)	$x_i n_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2 n_i$	$\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}$	$\left(\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}\right)^3 n_i$	$\left(\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}\right)^4 n_i$
4,00–5,60	4,8	5	24,0	–3,81	72,7076	–1,5592	–18,9543	29,5542
5,60–7,20	6,4	17	108,8	–2,21	83,2804	–0,9050	–12,6012	11,4042
7,20–8,80	8,0	9	72,0	–0,61	3,3856	–0,2508	–0,1420	0,0356
8,80–10,40	9,6	15	144,0	0,987	14,6027	0,4034	0,9850	0,3974
10,40–12,00	11,2	10	112,0	2,587	66,9084	1,0577	11,8316	12,5139
12,00–13,60	12,8	1	12,8	4,187	17,5282	1,7119	5,0168	8,5882
13,60–15,20	14,4	3	43,2	5,787	100,4565	2,3661	39,7401	94,0297
Итого	–	60	516,8	—	358,8693	–	25,8761	156,5232

Среднее значение признака составит

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{516{,}8}{60} = 8{,}61.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \frac{358{,}8693}{60} = 5{,}981,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}} = \sqrt{\frac{358{,}8693}{60}} = \sqrt{5{,}981} = 2{,}446.$$

Коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = 28{,}4\%.$$

Таким образом, средняя численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий по исследуемой совокупности хозяйств составила примерно 9 человек. Численность работников по хозяйствам в среднем колебалась в промежутке $\bar{x} \pm \sigma = 8{,}6 \pm 2{,}45$, т. е. от 6 до 11 чел. на 100 га сельскохозяйственных угодий. Этот интервал, а также коэффициент вариации показывают, что имеются незначительные различия в обеспеченности хозяйств рабочей силой.

Коэффициент асимметрии:

$$Ka = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^3 n_i}{n\sigma^3} = \frac{25{,}8761}{60} = 0{,}431.$$

Эксцесс:

$$E_x = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^4 n_i}{n\sigma^4} - 3 = \frac{156{,}5232}{60} - 3 = -0{,}391.$$

Найденное значение коэффициента асимметрии (недостаточно близкое к нулю) указывает, что распределение имеет небольшую правостороннюю асимметрию. Эксцесс значительно отличен от нуля, что говорит о плосковершинном распределении и возможном отличии распределения вариационного ряда от нормального распределения.

1. По списку на предприятии числится 105 рабочих, которые имеют следующие разряды: 1, 5, 2, 4, 3, 4, 6, 4, 5, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 2, 1, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 6, 1, 2, 4, 4, 3, 5, 6, 4, 3 ,3, 1, 3, 4, 3, 1, 2, 4, 4, 5, 6, 1, 3, 4, 5, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 1, 2, 4, 5, 3, 3, 2, 3, 6, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 2, 6, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 6, 5, 4, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 5, 6, 1, 5, 3, 4, 2, 1, 5.

Составить ряд распределения рабочих по разрядам. Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически.

Определить средний разряд рабочего, модальный и медианный разряд, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2. Имеются следующие данные о числе производственных подразделений на каждом из 95 сельскохозяйственных предприятий: 2, 4, 5, 3, 4, 6, 7, 4, 5, 3, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 2, 3, 4, 4, 5, 4, 3, 4, 6, 6, 5, 2, 3, 4, 3, 5, 6, 7, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 2, 5, 3, 5, 4, 3, 7, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 6, 7, 6, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 5, 4, 3, 2, 6, 4, 5, 7, 5, 4, 3, 4, 5, 7, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 4, 2, 2, 4, 3.

Составить ряд распределения сельскохозяйственных предприятий по числу производственных подразделений на одно хозяйство. Найти накопленные частоты и частости. Вариационный ряд изобразить графически.

Определить среднее число производственных подразделений на одно хозяйство, модальное и медианное значения числа подразделений, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3. В задачах (1–25) по данным приложения 10 составить статистический ряд распределения по одному признаку:

а) найти накопленные частоты и частости;

б) ряд распределения изобразить графически;

в) определить моду, медиану, среднее значение, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, показатели асимметрии и эксцесса;

г) сделать выводы по результатам расчетов.

1) Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

2) валовая продукция на среднегодового работника, тыс. руб.;

3) валовая продукция на 100 руб. основных средств, руб.;

4) валовая продукция на 100 руб. производственных затрат, руб.;

5) реализованная продукция на 100 руб. основных средств, руб.;

6) реализованная продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

7) реализованная продукция на среднегодового работника, тыс. руб.;

8) реализованная продукция на 100 руб. затрат, руб.;

9) производственные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

10) производственные затраты на среднегодового работника, тыс. руб.;

11) затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

12) основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

13) основные средства на среднегодового работника, тыс. руб.;

14) площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника, га.;

15) среднегодовая численность работников на одно хозяйство, чел.;

16) площадь сельскохозяйственных угодий на одно хозяйство, га;

17) валовая продукция на одну организацию, млн руб.;

18) выручка от реализации на одну организацию, млн руб.;

19) заработная плата на одного работника, тыс. руб.;

20) оборотные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

21) оборотные средства на одно хозяйство, тыс. руб.;

22) выручка от реализации на 100 руб. оборотных средств, руб.;

23) валовая продукция на 100 руб. оборотных средств, руб.;

24) оборотные средства на 100 руб. основных средств, руб.;

25) материальные затраты на 1 га сельхозугодий, тыс. руб.

4. Определить абсолютную и относительную плотность распределения работников предприятия по стажу их работы на данном предприятии.

По распределению работников по стажу работы найти средний стаж работы, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Таблица 11.4

Распределение работников по стажу работы

Стаж работы, лет	До 1	1–5	5–10	10–20	20–40	Всего
Число работников	8	12	16	14	10	60

5. Имеются следующие данные о площади посева овощей в хозяйствах совокупности районов.

Таблица 11.5

Площадь посева овощей на хозяйство

Район	Номер хозяйства						
	1	2	3	4	5	6	7
1	8	10	12	6	15	30	21
2	32	16	26	41	44	38	—
3	101	165	230	144	184	176	260
4	22	30	44	18	16	31	—
5	10	7	4	3	12	7	6
6	255	366	384	273	450	510	—

Продолжение табл. 11.5

Район	Номер хозяйства						
	1	2	3	4	5	6	7
7	121	84	96	110	161	143	—
8	34	16	84	71	36	8	17
9	46	41	48	52	50	58	—
10	15	24	57	44	34	14	24

Дать сравнительную оценку колеблемости площади посева овощей в хозяйствах двух районов.

6. Путем устного опроса изучалось качество продукции, выпускаемой фирмой и реализуемой в магазине этой фирмы. Посетители давали оценку качества по десятибалльной шкале. Были получены сводные данные.

Определить средний балл качества продукции, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, показатели асимметрии и эксцесса.

Таблица 11.6

Балльная оценка продукции предприятия

Оценка качества продукции, балл	1–2	3–4	5–6	7–8	9–10
Число случаев	3	8	36	89	45

7. По данным распределения студентов по результатам сдачи экзаменов определить: средний балл успеваемости студентов по каждому предмету и по всем предметам; дисперсии балла успеваемости по предмету и в целом по всем предметам; межгрупповую дисперсию. Найти общую дисперсию успеваемости, используя правило сложения дисперсий.

Таблица 11.7

Распределение студентов по результатам сдачи экзаменов

Оценка на экзамене	Число студентов, получивших оценку по предметам			
	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	6	10	8	8
4	10	8	9	9
5	7	6	4	5

8. Работники предприятия сгруппированы по возрасту. Определить: средний возраст работников предприятия в целом и по отмеченным категориям; модальное и медианное значения возраста работников по категориям и предприятию; дисперсию и среднее квадратическое отклонение возраста по категориям работников и предприятию; межгрупповую дисперсию возраста работников.

Таблица 11.8

Распределение работников предприятия по возрасту

Категории работников	Возраст работников, лет					Всего работников
	До 30	30–40	40–50	50–60	Свыше 60	
Рабочие	43	141	216	127	118	645
Руководители	2	4	6	8	4	24
Специалисты	3	18	30	34	22	107
Всего работников	48	163	252	169	144	776

Найти общую дисперсию возраста работников, используя правило сложения дисперсий.

9. Администрацию универсама интересует оптимальный уровень запасов продуктов в торговом зале, а также среднемесячный объём покупок товаров, которые не являются предметом ежедневного потребления в семье (например, таких, как сода). Для выяснения этого вопроса менеджер универсама в течение января регистрировал частоту покупок 100-граммовых пакетов с содой и собрал следующие данные: 4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 8.

Построить вариационный ряд, определить его числовые характеристики. Какие рекомендации вы бы дали администрации универсама?

12. Выборочный метод

Выборочным называется наблюдение, при котором обследованию подвергается часть единиц совокупности, отобранных на основе научно разработанных принципов, а показатели, найденные по отобранной части единиц, должны достаточно точно характеризовать всю совокупность единиц.

Совокупность единиц, из которой производится отбор, называется *генеральной совокупностью*, а ее часть, подвергающаяся изучению, — выборочной совокупностью. Отбор единиц из генеральной совокупности может быть произведен повторным или бесповторным способом. Если отобранная единица возвращается в генеральную совокупность и может снова попасть в выборку, то отбор — *повторный*. Если же отобранная единица в генеральную совокупность не возвращается, то отбор — *бесповторный*.

Генеральная доля $p = \frac{M}{N}$, выборочная доля $w = \frac{m}{n}$, где M и m — число единиц генеральной и выборочной совокупностей, обладающих определенным свойством; N и n — объемы генеральной и выборочной совокупностей соответственно.

Отбор единиц производится случайным, механическим, типическим, серийным, комбинированным и другими способами.

Случайным называется отбор единиц из генеральной в выборочную совокупность, при котором каждая единица имеет одинаковую вероятность попасть в выборку. Основной задачей выборочного метода является количественная оценка параметров генеральной совокупности по данным выборки. Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров генеральной совокупности по выборке, они должны обладать свойствами несмещенности, эффективности и состоятельности.

Оценка параметров генеральной совокупности может быть точечной и интервальной. Точечная оценка задается одним числом. Выборочные средняя доля, среднее квадратическое отклонение являются точечными оценками аналогичных характеристик генеральной совокупности. Оценка, задаваемая двумя числами (границами интервала), называется интервальной.

Доверительный интервал рассчитывается по формуле:

— для доли

$$w - \Delta_w \le p \le w + \Delta_w; \tag{12.1}$$

— для средней

$$\bar{x}_в - \Delta_{\bar{x}} \le \bar{x}_г \le \bar{x}_в + \Delta_{\bar{x}}, \tag{12.2}$$

где Δ_w и $\Delta_{\bar{x}}$ — предельные ошибки выборки для доли и средней соответственно.

В больших выборках $(n > 60)$ t находится по таблице значений функций $\Phi\ (x)$ при заданном уровне доверительной вероятности $\gamma = 2\Phi(x)$.

Если $\gamma = 0{,}95, t = 1{,}96$; если $0{,}99, t = 2{,}58$.

Таблица 12.1

Формулы расчета предельной ошибки
выборки при случайном отборе

Предельная ошибка	Повторный отбор	Бесповторный отбор
Для средней	$\Delta_{\bar{X}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\Delta_{\bar{X}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$
Для доли	$\Delta_{\bar{p}} = t \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$	$\Delta_{\bar{p}} = t \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$

В малых выборках $(n \le 60)$ значение t находится по таблице t-распределения Стьюдента в соответствии с заданным уровнем доверительной вероятности γ и числом степеней свободы $k = n - 1$. Оценкой генеральной дисперсии служит «исправленная» выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}. \tag{12.3}$$

Таблица 12.2

Формулы расчета необходимой численности
выборки при случайном отборе

Предельная ошибка	Повторный отбор	Бесповторный отбор
Для средней	$n = \frac{t^2\sigma^2}{\Delta^2}$	$n = \frac{t^2\sigma^2 N}{N\Delta^2 + t^2\sigma^2}$
Для доли	$n = \frac{t^2 w(1-w)}{\Delta^2}$	$n = \frac{t^2 N w(1-w)}{N\Delta^2 + t^2 w(1-w)}$

Пример 1. При уровне доверительной вероятности 0,95 определить доверительный интервал для средней численности работников на 100 га сельскохозяйственных угодий в примере 2 раздела 11, учитывая, что проводилась 10%-ная случайная бесповторная выборка. При тех же условиях найти необходимый объём выборки для уменьшения предельной ошибки в два раза.

Решение. Средняя численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий составляет 8,6. Доверительный интервал для средней определяется по формуле

$$\bar{x}_\text{в} - \Delta_{\bar{x}_\text{в}} < \bar{x}_\text{г} < \bar{x}_\text{в} + \Delta_{\bar{x}_\text{в}}, \qquad (12.4)$$

где $\bar{x}_\text{в}$ — выборочная средняя;

$\bar{x}_\text{г}$ — средняя генеральной совокупности;

$\Delta_{\bar{x}}$ — предельная ошибка выборки для средней.

Предельная ошибка выборки при случайном бесповторном отборе определяется по формуле (табл. 12.1):

$$\Delta_{\bar{x}} = t\sigma(\bar{x}) = t\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \qquad (12.5)$$

где t — квантиль нормального закона распределения, при $\gamma = 0{,}95$, $t = 1{,}96$ (прил. 1);

N — объем генеральной совокупности, где $\frac{n}{N} = 0{,}1, n = 60$, следовательно, $N = 600$;

σ^2 — выборочная оценка дисперсии генеральной совокупности; так как объем выборочной совокупности $n = 60 > 30$, то в качестве выборочной дисперсии используем $\sigma^2 = 5{,}981$.

Имеем

$$\Delta_{\bar{x}} = 1{,}96\sqrt{\frac{5{,}981}{60}\left(1 - \frac{60}{600}\right)} = 0{,}59.$$

Значит, с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$, можно утверждать, что средняя численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий во всей совокупности хозяйств находится в границах:

$$\bar{x} \pm \Delta_{\bar{x}} = 8{,}6 \pm 0{,}59,$$

т. е. от 8,01 до 9,2.

Необходимый объем выборки, чтобы предельная ошибка не превышала $0{,}5\Delta_{\bar{x}} = 0{,}3$ при заданном уровне доверительной вероятности, в случае случайного бесповторного отбора определяется по формуле (табл. 12.2):

$$n = \frac{t^2\sigma^2 N}{t^2\sigma^2 + \Delta^2 N}.$$

Следовательно,

$$n = \frac{1{,}96^2 5{,}981 \cdot 600}{1{,}96^2 5{,}981 + 0{,}3^2 \cdot 600} = 179.$$

Значит, для уменьшения предельной ошибки в два раза объем совокупности необходимо увеличить в три раза.

1. Для определения потерь зерна при уборке случайным способом проведено 100 измерений. Средняя величина потерь составила 1,8 ц с одного гектара посевов при среднем квадратическом отклонении 0,5 ц с га. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя величина потерь зерна с 1 га и возможная величина потерь, если площадь уборки зерновых составила 640 га.

2. С помощью случайной выборки изучалось время выполнения производственной операции рабочими бригады. На основании 60 наблюдений установлено, что в среднем на выполнение производственной операции затрачивалось 0,5 ч при среднем квадратическом отклонении 0,12 ч. Считая время выполнения производственной операции нормально распределенной случайной величиной, определить границы, в которых находится среднее время выполнения производственной операции всех рабочих, с доверительной вероятностью:

а) 0,9;

б) 0,95.

3. Случайным бесповторным способом изучались остатки горюче-смазочных материалов на складе предприятий. Обследовано 110 предприятий из 750. Средние остатки составили 150 т при среднем квадратическом отклонении 42 т. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будут находиться средние остатки горюче-смазочных материалов на одно предприятие и общие остатки горюче-смазочных материалов.

4. Считая данные задачи 1 заданий к разделу 11 результатом 20%-ной выборки, определить:

а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения разряда рабочих;

б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95;

в) вероятность того, что интервал $(0{,}95\bar{X}_в;\ 1{,}05\bar{X}_в)$ покроет математическое ожидание разряда рабочего;

г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 1,5 раза при сохранении уровня остальных характеристик.

5. Считая данные задачи 2 заданий к разделу 11 результатом 20%-ной выборки, определить:

а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения числа производственных подразделений в расчете на одно сельскохозяйственное предприятие;

б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,9;

в) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,9 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза при сохранении уровня остальных характеристик.

6. Считая данные задачи 3 заданий к разделу 11 результатом 20%-ной случайной бесповторной выборки, определить:

а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения изучаемого параметра;

б) доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95;

в) вероятность того, что интервал ($0{,}95\overline{x}_в$; $1{,}05\overline{x}_в$) покроет математическое ожидание изучаемого параметра;

г) объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 предельная ошибка выборки уменьшится в 2 раза при сохранении уровня остальных характеристик.

7. В районе имеется 10 000 дачных участков населения. В результате выборочного обследования 300 дачных участков оказалось, что средняя выборочная урожайность овощей составила 250 ц с гектара при среднем квадратическом отклонении 60 ц с га. Известно, что 40% общей площади посевов овощей занимали помидоры. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на всех дачных участках и удельный вес посевов помидор. Сколько дачных участков необходимо обследовать, чтобы предельная ошибка выборки по признакам уменьшилась в 1,5 раза?

8. Для определения влажности зерна случайным способом было взято 25 проб. Средний процент влажности зерна составил 16%, а выборочное среднее квадратическое отклонение — 2,5%. Определить:

а) несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения;

б) интервал, который покроет математическое ожидание с доверительной вероятностью 0,95.

9. Вероятность изготовления продукции высшего качества фирмой составляет 0,9. Сколько необходимо обследовать единиц продукции, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было утверждать, что доля продукции высшего качества по выборке будет отклоняться от постоянной вероятности по модулю не более чем на 0,03?

10. Случайным бесповторным способом проведено выборочное обследование семей района. Из 1000 семей обследовано 80, по которым определен душевой доход на одного члена семьи, представленный в виде интервального вариационного ряда.

11. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средний месячный доход на одного члена семьи по району, а также долю семей с доходами менее 20 руб. на одного члена семьи.

Таблица 12.3

Распределение семей по величине месячного дохода на одного члена семьи

Группы семей по месячному доходу на одного члена семьи, тыс. руб.	До 10	10–20	20–30	30–40	Свыше 40
Число семей	6	15	30	19	10

12. На фирме проведен выборочный опрос 10% работников по вопросам изменения условий труда. Из 90 работников основного производства за изменение условий труда высказались 65 человек, из 30 работников вспомогательного производства — 20, а из 25 работников, занятых управлением фирмой, — 21. С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля работников фирмы, поддерживающих изменение условий труда.

13. Для определения влияния микроэлементов на результаты откорма свиней проведен опыт на 8 группах животных. Рационы отличаются набором и дозами микроэлементов (табл. 12.4). С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться среднесуточный прирост свиней по каждому рациону и по опыту в целом.

Таблица 12.4

Результаты откорма свиней в опыте

Рацион	Поголовье свиней, гол.	Среднесуточный прирост живой массы, г	Среднее квадратическое отклонение, г
1	90	500	40
2	75	575	45
3	100	610	54
4	50	450	52
5	70	590	65
6	60	650	70
7	110	490	48
8	80	540	62

14. Взято 16 проб молока, поступившего на реализацию из акционерного сельскохозяйственного предприятия. Средняя жирность молока составила 3,7% при среднем квадратическом отклонении 0,5%. Какова вероятность того, что средняя жирность молока всех партий не выйдет за границы от 3,6 до 3,8%?

15. Тридцать восемь студентов университета сдали экзамен по статистике на отличные и хорошие отметки. Чему равна вероятность того, что в случайной выборке из 100 студентов по крайней мере 30 окажутся с хорошими и отличными оценками по статистике?

16. Автотранспортная компания желает оценить среднее время транзита грузов из столицы в регионы страны. Случайная выборка 20 партий товаров дала $\bar{X}$=2,6 дня, s = 0,4 дня. Постройте 99%-ный доверительный интервал для среднего времени транзита товаров.

17. Предположим, что среднее время пребывания в очереди к кассиру универмага составляет 12 мин со средним квадратическим отклонением 3 мин. Если вы отобрали случайным образом 5 покупателей, то чему равна вероятность того, что их время пребывания в очереди составит, по крайней мере, 10 мин? Чему равна средняя выборочная времени ожидания в очереди? Чему равно среднее квадратическое отклонение выборочной средней?

18. Из 500 выпускников средних школ города 72% собираются поступать в университет. Чему равна вероятность того, что среди случайно отобранных выпускников доля желающих поступить в вуз окажется выше 80%?

19. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[a, b]$. Вычислить среднее значение и дисперсию статистики $\bar{X}$:

а) имеет ли статистика $\bar{X}$ равномерное распределение;

б) нормальное распределение?

20. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром 3. Найти распределение выборки $Y_1, \dots, Y_n$, где $Y_i = 1 - e^{-3X_i}$.

21. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0,1]$. Найти распределение выборки $Y_1, \dots, Y_n$, где $Y_i = -\ln X_i$.

22. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из некоторого распределения F, у которого функция распределения $F(y)$ непрерывна и строго возрастает. Какое распределение имеет выборка $Y_1, \dots, Y_n$, где $Y_i = F(X_i)$?

23. В терминах общей функции распределения элементов выборки найти функцию распределения:

а) максимального члена вариационного ряда X_n;

б) минимального члена вариационного ряда $X_{(1)}$.

Решение. Поскольку событие $\{X_{(n)} < y\}$ совпадает с событием

$$\{X_1 < y, \dots, X_n < y\}$$

и случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы, имеем равенства

$$\mathrm{P}\{X_{(n)} < y\} = P\{X_1 < y, \dots, X_n < y\}.$$

Эмпирическая функция распределения

24. Пусть $a > 0$ и b — два фиксированных действительных числа. Пусть F_n^* — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$, а G_n^* — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $Y_1, \dots, Y_n$, где $Y_i = aX_i + b$. Доказать, что при всех y имеет место равенство $G_n^*(y) = F_n^*\left(\frac{y-b}{a}\right)$.

25. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из распределения F. Доказать, что для любых $y \in R$ и $k \in \{0,1, \dots, n\}$ справедливо равенство

$$\mathrm{P}\{F_n^*(y) = \frac{k}{n}\} = C_n^k F^k(y)(1 - F(y))^{n-k}.$$

Метод моментов

26. Пусть дана выборка из биномиального распределения с параметрами m и p. Используя метод моментов, построить оценку:

а) параметра p, если значение m известно;

б) параметра m, если значение p известно;

в) вектора (m, p).

Метод максимального правдоподобия

27. Найти оценку максимального правдоподобия дисперсии σ^2 нормального распределения, если среднее значение α известно.

28. Найти оценку максимального правдоподобия параметра $p \in (0,1)$ геометрического распределения.

29. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из усеченного на заданном уровне m геометрического распределения с параметром $p \in (0,1)$:

$$P\{X_1 = k\} = p(1-p)^k, k = 0, \ldots, m-1,$$

$$P\{X_1 = m\} = 1 - P\{X_1 \le m-1\} = (1-p)^m .$$

Байесовские оценки

30. Пусть дана выборка из нормального распределения со средним a и единичной дисперсией, причем параметр a имеет нормальное распределение с нулевым средним и известной дисперсией α^2 (в $R^n \times \Theta$). Построить байесовскую оценку параметра α.

Решение. Так как

$$q(t) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-t\frac{2}{2\sigma^2}},$$

$$f_t(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - t)^2}{2}},$$

то плотность $q(t/x_1, \ldots, x_n)$ пропорциональна (как функция от t) произведению $q(t) f_t(x_1, \ldots, x_n)$ или, что то же самое, пропорциональна

$$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - t)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2\left(\frac{1}{\sigma^2}+n\right)}{2} + \bar{x}nt - \frac{n\overline{x^2}}{2}}.$$

Из равенства

$$-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+n\right) + \bar{X}nt = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+n\right)\left(t - \frac{\bar{X}n}{\frac{1}{\sigma^2}+n}\right)^2 + \frac{(\bar{X}n)^2}{2\left(\frac{1}{\sigma^2}+n\right)}$$

следует, что плотность $q(t/x_1, \ldots x_n)$ отвечает нормальному распределению со средним $\overline{X}n\sigma^2 / 1 + n\sigma^2$ и дисперсией $\sigma^2/1 + n\sigma^2$. Поэтому искомая оценка имеет вид

$$a_n^* = \int_\theta tq(t / X_1, \ldots, X_n)dt = \overline{X}n\sigma^2 / 1 + n\sigma^2.$$

31. Пусть дана выборка из распределения Бернулли с параметром p, причем p равномерно распределено на отрезке $[0,1]$. Построить байесовскую оценку параметра p.

32. Пусть дана выборка из распределения Бернулли с параметром p, причем p принимает значения 1/2 и 1/3 с одинаковыми вероятностями. Построить байесовскую оценку параметра p.

Несмещенность и состоятельность

33. Пусть $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n Y_n)$ — выборка, соответствующая случайному вектору (ξ, η), т. е. $P\{X_1 < x, Y_1 < y\} = P\{\xi < x, \eta < y\}$. Доказать, что величина $m_{1,1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$ является несмещенной и состоятельной оценкой $\mathrm{Cov}(\xi, \eta)$.

34. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющих систематических ошибок: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383 м. Определить несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина:

а) известна и равна 375 м;

б) неизвестна.

Доверительные интервалы

35. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения со средним a и дисперсией σ^2, причем значение σ^2 известно. Построить точный доверительный интервал для α.

36. По выборке из нормального распределения построить точный доверительный интервал для среднего a и дисперсии σ^2.

13. Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется всякое предположение о генеральной совокупности, проверяемое по выборке. Статистические гипотезы делятся на:

— *параметрические* — сформулированные относительно параметров (среднего значения, доли, дисперсии и др.) распределения известного вида;

— *непараметрические* — сформулированные относительно вида распределения (например, оценка по выборке нормальности генеральной совокупности).

Выдвигаемая гипотеза называется *основной или нулевой* (H_0). Гипотеза, противоположная нулевой, называется *конкурирующей или альтернативной гипотезой* (H_1).

Так как проверка статистических гипотез осуществляется по выборочным данным, то возникает возможность принятия ошибочных решений. Различают ошибки первого и второго рода.

Ошибка первого рода заключается в том, что будет отвергнута правильная гипотеза, т. е. когда в действительности верна H_0 гипотеза, а в результате проверки она была отвергнута и принята гипотеза H_1.

Вероятность ошибки первого рода называется *уровнем значимости* и обозначается α.

$$\alpha = P\left(H_1 / H_0\right). \tag{13.1}$$

Чем меньше уровень значимости α, т. е. вероятности совершить ошибку первого рода, тем меньше вероятность отклонить верную нулевую гипотезу. Уровень значимости задается заранее.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза, т. е. в действительности верна некоторая альтернативная гипотеза, а по выборочным данным была принята неверная гипотеза H_0. Вероятность ошибка второго рода обозначается β.

$$\beta = P\left(H_0 / H_1\right). \tag{13.2}$$

Существует правильное решение двух видов:

$$P = \left(H_0 / H_0\right) = 1 - \alpha, \text{ а также } P\left(H_1 / H_1\right) = 1 - \beta. \tag{13.3}$$

Вероятность $1 - \beta$ называется *мощностью критерия*. Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность ошибки второго рода.

Статистическим критерием (K) называют случайную величину, с помощью которой принимают решение о принятии или отклонений нулевой гипотезы.

Проверка статистических гипотез обычно осуществляется в определенной последовательности.

1. Располагая выборочными данными, формулируют нулевую и конкурирующую гипотезы.

2. Задают уровень значимости α (обычно принимают $\alpha = 0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}05$; $0{,}00$).

3. Выбирают критерий K, по которому будет проверяться выдвинутая гипотеза. Обычно используют следующие распределения критериев:

— u — нормальное распределение;

— χ^2 — распределение Пирсона (*хи*-квадрат);

— t — распределение Стьюдента;

— F — распределение Фишера — Снедекора.

4. На основании выборочных данных определяют фактически наблюдаемое значение критерия $K_н$ (прил. 5–7).

5. В зависимости от вида альтернативной гипотезы находят по соответствующей таблице (прил. 1–4) критические значения критерия для двусторонней $\left(K_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ и } K_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ или односторонней области ($K_{1-\alpha}$ или K_{α}). Если фактически наблюдаемые значения критерия попадают в критическую область, то нулевая гипотеза отвергается. В противном случае принимается нулевая гипотеза и считается, что она не противоречит выборочным данным (при этом существует возможность ошибки с вероятностью, равной α).

Пример 1. Руководство некоторой политической партии утверждает, что на предстоящих выборах в парламент за кандидатов партии проголосует 50,0% избирателей. Независимая социологическая служба провела опрос 600 случайно выбранных будущих избирателей, из которых за кандидатов этой партии отдадут свои голоса 250. Можно ли при уровне значимости 0,05 согласиться с мнением руководства партии?

Решение. По условию

$$p_0 = 0{,}5;\ w = \frac{k}{n} = \frac{250}{600} = 0{,}417.$$

Гипотеза $H_0\colon\ p = p_0 = 0{,}5$ при альтернативной $H_1\colon p < 0{,}5$. Найдем наблюдаемое значение критерия по формуле

$$u_н = \frac{w - p_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}417 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{600}}} = -4{,}07.$$

При $\alpha = 0{,}05$ $\Phi\left(u_{кр}\right) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45$ для левосторонней области $u_{кр} = -1{,}645$ (прил. 1). Так как $u_н < u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, нет оснований утверждать, что 50% избирателей отдадут голоса за кандидатов партии. К этому же выводу можно прийти при конкурирующей гипотезе $H_1\colon p \neq 0{,}5$, так как при $\alpha = 0{,}05$, $u_{кр} = 1{,}96$.

1. По данным приложения 10 по одному показателю случайным способом провести 30%-ную выборку. По генеральной и выборочной совокупности определить средние значения. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве выборочного параметра среднему значению по всей совокупности.

2. Проверить гипотезу о равенстве средних урожайностей овощей в двух совокупностях хозяйств, если по случайной выборке получены следующие результаты:

1-я совокупность хозяйств		2-я совокупность хозяйств	
урожайность, т/га	число хозяйств	урожайность, т/га	число хозяйств
x_i	n_i	y_i	m_i
25–35	15	15–25	22
35–45	30	25–35	30
45–55	24	35–45	41
	$n = 69$	45–55	17
			$m = 110$

3. По двум независимым выборкам объема n_1 и n_2, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, проверить гипотезу о равенстве средних при уровне значимости α = 0,01, если:

а) $\bar{x} = 50, \bar{y} = 45, D(X) = 1200, D(Y) = 2025, n_1 = 35, n_2 = 45$;

б) $\bar{x} = 70, \bar{y} = 60, D(X) = 1470, D(Y) = 1320, n_1 = 60, n_2 = 40$.

4. Провести две случайные выборки по одному из показателей приложения 6 объемами n_1 и n_2. Проверить нулевую гипотезу о равенстве выборочных средних при уровне значимости 0,05 (предполагается, что дисперсии неизвестны и одинаковы):

а) $n_1 = n_2 = 20$;

б) $n_1 = 20$; $n_2 = 10$.

5. Проводилось испытание 8 сортов озимой пшеницы. Каждый сорт высевался на 6 делянках одинаковой площади. При 5%-ном уровне значимости проверить гипотезу о существенности различий в средней урожайности двух сортов озимой пшеницы (номера сортов даются студенту преподавателем). Урожайность озимой пшеницы, ц/га:

Повторения	Сорт							
	1	2	3	4	5	6	7	8
I	75	51	60	49	63	44	55	60
II	74	50	62	52	61	40	53	55
III	76	56	61	45	62	41	51	53
IV	71	52	56	48	56	43	58	57
V	77	54	61	47	62	45	54	54
VI	75	52	59	46	61	41	53	56

6. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве результатов сдачи экзамена по теории вероятностей и математике.

Предмет	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Теория вероятностей	4	5	3	4	5	3	5	2	4	4	3	2	4	4	5	3
Математика	4	5	2	3	4	3	5	2	4	3	4	3	4	3	5	2

7. Результаты выступлений спортсменов оценивались двумя судьями по десятибалльной шкале.

Номер спортсмена		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Оценка судьи	1	8,5	9,0	7,4	9,4	9,7	6,5	7,1	8,3	9,1	8,0
	2	9,3	9,1	7,7	9,3	9,2	6,0	7,3	8,1	9,1	7,9

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о значимости различий в оценке выступлений спортсменов двумя судьями.

8. При уровне значимости 0,05 по двум районам проверить гипотезы о равенстве: дисперсий, средних выборочных урожайностей, долей посевов овощей в площади приусадебных участков. Если произведено выборочное обследование 10% приусадебных участков восьми районов случайным бесповторным способом и получены следующие результаты об урожайности овощей.

№ п/п	Урожайность, ц/га	Среднее квадратическое отклонение, ц/га	Доля овощей в площади участков, %	Число обследованных участков
1	215	30	30	100
2	246	35	35	80
3	305	32	40	150
4	220	24	50	120
5	164	20	36	60
6	280	23	65	70
7	340	40	45	90
8	316	36	53	100

9. По результатам задачи 1 контрольных заданий главы 11 проверить гипотезу о нормальном распределении рабочих предприятия по разрядам.

10. По результатам задачи 2 контрольных заданий главы 11 проверить гипотезу о том, что число производственных подразделений на предприятиях распределяется по нормальному закону.

11. По результатам задачи 3 контрольных заданий главы 11 проверить гипотезу о нормальном распределении совокупности хозяйств по изучаемому признаку.

12. Изучаются колебания X_j (денежные единицы) курсов ценных бумаг (тип $N1$, $N2$, $N3$, $N4$), принадлежащих разным группам риска (риск оценивается величиной дисперсии) и в различные периоды времени. Исследования ведутся двумя независимыми аналитическими центрами A и B. Банк, заинтересованный в результатах анализа, в целях формирования «портфеля ценных бумаг» жела-

ет знать результаты классификации по группам. Сделав случайную выборку информации о колебании курсов, аналитики получили следующие данные (табл. 13.1–13.6). X_j — цена одного пакета ценных бумаг. Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, необходимые для ответа на вопросы:

— какие бумаги можно отнести к бумагам одинаковой группы риска;

— отличаются ли арифметические средние колебания курса;

— различны ли выводы аналитических центров *A* и *B*;

— какой тип бумаг вы предпочтете купить, если ваши средства ограничены суммой не более *C* денежных единиц за один пакет ценных бумаг?

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Допустимая цена одного пакета ЦБ С = 1200.

Анализу можно подвергать не все типы бумаг (по личному выбору).

Таблица 13.1

Бумаги *N*1, центр *A*; $n_1 = 190$

$X_j \cdot 10^2$	2	3	6	8	9	11	13	14	16	17	19	20
n_j	5	5	5	10	25	30	40	30	20	10	5	5

Таблица 13.2

Бумаги *N*2, центр *A*; $n_2 = 132$

$X_j \cdot 10^2$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
n_j	1	5	5	10	25	20	25	20	15	5	1

Таблица 13.3

Бумаги *N*2, центр *B*; $n_3 = 93$

$X_j \cdot 10^2$	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n_j	2	3	15	20	30	15	5	2	1

Таблица 13.4

Бумаги *N*3, центр А; $n_4 = 175$

$X_j \cdot 10^2$	3	5	7	8	9	11	13	14	16	17	19	21
n_j	1	5	10	20	30	40	35	15	10	5	3	1

Таблица 13.5

Бумаги *N*4, центр *B*; $n_5 = 90$

$X_j \cdot 10^2$	9	10	11	12	13	14	15	16
n_j	1	2	10	25	30	15	5	2

Таблица 13.6

Бумаги *N*4, центр *A*; $n_6 = 22$

$X_j \cdot 10^2$	11	12	13	14	15	16
n_j	1	5	10	3	2	1

13. (*Задача инвестирования.*) Инвестиционная компания $N1$ объявила средний годовой доход по акциям от определенного производства равным 11,2%. Инвестор желает проверить, действительно ли это так, и делает случайные выборки объемом N акций интересующей его отрасли индустрии. Попутно инвестор проводит анализ годового дохода по акциям инвестиционной компании $N2$, по которым объявлен средний годовой доход 12,0%. Имеет ли инвестор достаточно оснований, чтобы отказаться от инвестирования в компанию $N1$? Необходимые статистические данные представлены таблицами 13.7–13.10.

Таблица 13.7

Компания $N1$, 1-й год; $n_1 = 115$

X_j, %	9,7	10,1	10,4	10,6	10,9	11,0	11,2	11,3	11,4	11,6	12,1
n_j	1	3	10	18	29	25	15	8	3	2	1

Таблица 13.8

Компания $N2$, 1-й год; $n_2 = 70$

X_j, %	10,3	10,6	10,8	10,9	11,1	11,4	11,7	12,2	12,4
n_j	1	3	5	10	20	18	8	3	2

Таблица 13.9

Компания $N1$, 2-й год; $n_3 = 25$

X_j, %	10,7	10,9	11,0	11,1	11,4	11,7	12,0
n_j	1	1	5	10	5	2	1

Таблица 13.10

Компания $N2$, 2-й год; $n_4 = 25$

X_j, %	10,6	11,0	11,2	11,5	11,6	11,8	11,9
n_j	1	3	5	8	5	2	1

Сформулируйте и проверьте статистические гипотезы, необходимые для ответа на вопросы:

— отличаются ли результаты анализа за 1-й и 2-й годы;

— существенно ли различие средних годовых доходов компаний $N1$, $N2$;

— отличаются ли наблюдаемые средние годовые доходы от объявленных инвестиционными компаниями;

— акции какой компании вы предпочтете, учитывая риск (измеряемый дисперсией) от приобретения этих акций, если уровень риска: ограничен, неограничен? Можно ли пользоваться результатами анализа по малым выборкам? Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Допустимая доля риска 0,01.

Критерии согласия

14. Цифры 0, 1, 2, …, 9 среди 800 первых десятичных знаков числа π появились 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 91 раз соответственно. Проверить гипотезу

о согласии этих данных с законом равномерного распределения на множестве $\{0, 1, \ldots, 9\}$ распределения.

15. Ниже приводят результаты 4096 опытов, состоящих в одновременном подбрасывании 12 костей (данные Уэлдона). В каждом из опытов подсчитывалось число костей, выпавших кверху шестеркой (гранью с шестью очками). Проверить гипотезу правильности костей.

Число шестерок	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7	Всего
Число случаев	447	1145	1181	796	380	115	24	8	4096

14. Дисперсионный анализ

Сущность дисперсионного анализа заключается в том, что дисперсия изучаемого признака разлагается на сумму составляющих ее дисперсий, каждое слагаемое которой соответствует действию определенного источника изменчивости.

Например, в однофакторном анализе мы получим разложение вида:

$$\sigma_c^2 = \sigma_A^2 + \sigma_z^2,$$

а в двухфакторном:

$$\sigma_c^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_Z^2, \tag{14.1}$$

где σ_c^2 — общая дисперсия изучаемого признака C;

σ_A^2 — дисперсия, вызванная влиянием фактора A;

σ_B^2 — дисперсия, вызванная влиянием фактора B;

σ_{AB}^2 — дисперсия, вызванная взаимодействием факторов A и B;

σ_z^2 — дисперсия, вызванная неучтенными случайными причинами (случайная дисперсия).

В дисперсионном анализе рассматривается нулевая гипотеза — ни один из рассматриваемых факторов не оказывает влияния на изменчивость признака.

Расчеты проводятся в следующей последовательности:

— определяются необходимые суммы квадратов отклонений результативного признака в соответствии с моделью дисперсионного анализа;

— находится число степеней свободы вариации по каждому источнику;

— рассчитываются средние квадраты отклонений;

— определяются наблюдаемые и критические значения F-критерия Фишера — Снедекора, формулируются выводы относительно гипотезы H_0;

— оценивается значимость различий групповых средних по вариантам опыта.

Если $F_н > F_{кр}$, то делается вывод о сущности различий результативного признака, обусловленных влиянием признака — фактора, т. е. действие фактора на результативный признак признается статистически достоверным.

Рассмотрим алгоритм однофакторного дисперсионного анализа. Определенный фактор принимает p различных уровней, и на каждой уровне сделано n наблюдений, что дает $N = np$ наблюдений. Модель однофакторного дисперсионного анализа имеет вид:

$$x_{ij} = \bar{x} + A_i + \varepsilon_{ij}, \tag{14.2}$$

где $\bar{x}$ — общая средняя арифметическая;
A_i — эффект фактора А на i − м уровне;
ε_{ij} — случайная величина или остаток, характеризует влияние прочих неучтенных факторов.

Данные обычно располагают в виде таблицы результатов (табл. 14.1) X_{ij} $(i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, n)$.

Таблица 14.1

Результаты наблюдений

Уровень фактора, i	Номер наблюдения, j					
	1	2	...	j	...	n
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}
...	…	...	…	…	…	…
A_i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}
...	…	…	…	…	…	…
A_p	x_{p1}	x_{p2}	…	x_{pj}	…	x_{pn}

Выдвигается нулевая гипотеза $H: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_p$, при конкурирующей гипотезе не все средние по уровням факторы равны.

Рассматриваем тождество $\left(x_{ij} - \bar{x}_{..}\right) = (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{..}) + \left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot}\right)$. Суммируя обе части уравнения по i и j и проведя преобразования, получим

$$\sum\nolimits_{i,j}\left(x_{ij} - \bar{x}_{..}\right)^2 = \sum\nolimits_{i,j}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{..})^2 + \sum\nolimits_{i,j}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot}\right)^2. \tag{14.3}$$

(Точка вместо индекса обозначает усреднение соответствующих наблюдений по этому индексу.)

Иначе (14.3) можно записать:

$$SSo = SSv + SSz.$$

Величина факторной суммы квадратов отклонений SSv вычисляется по отклонениям p средних от общей средней $\bar{X}$, поэтому SSv имеет $(p - 1)$ степеней свободы. Величина остаточной суммы квадратов отклонений SSz вычисляется по отклонениям N наблюдений от p выборочных средних и, следовательно, имеет

$$N - p = np - p = p\,(n - 1)$$

степеней свободы. Общая сумма квадратов отклонений SSo имеет $(N - 1)$ степеней свободы. Результаты расчетов приводят в виде таблицы дисперсионного анализа (табл. 14.2).

Таблица 14.2

Однофакторный дисперсионный анализ

Источник изменчивости	Суммы квадратов отклонений (SS)	Степени свободы (k)	Средние квадраты (s^2)
Различия между уровнями (факторная)	$SS_v = n\sum_{i,j}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$	$k_1 = p - 1$	$s_v^2 = \dfrac{SS_v}{p-1}$
Различия внутри уровней (остаточная)	$SS_z = \sum_{i,j}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot}\right)^2$	$k_2 = N - p$	$s_z^2 = \dfrac{SS_z}{N-p}$
Сумма	$SS_0 = \sum_{i,j}\left(x_{ij} - \bar{x}_{\cdot\cdot}\right)^2$	$N - 1$	

Если гипотеза о том, что влияние всех уровней одинаково, справедлива, то обе величины s_v^2 и s_z^2 будут несмещенными оценками σ^2.

Значит, гипотезу можно проверить, вычислив отношение s_v^2/s_z^2 и сравнив его с $F_{\text{кр.}}$, имеющего $k_1 = p - 1$ и $k_2 = N - p$ степеней свободы.

Если $F_{\text{н.}} > F_{\text{кр.}}$, то будет справедлива гипотеза о значимом влиянии фактора A на результат наблюдений. В этом случае оценивается значимость различий между средними значениями результативного признака по уровням факторного признака. Если $F_{\text{н.}} < F_{\text{кр.}}$, то принимается нулевая гипотеза о незначимости различий между средними арифметическими значениями по вариантам опыта. Для оценки существенности частых различий вычисляют:

а) среднюю ошибку средней арифметической

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s_z^2}{n}}; \tag{14.4}$$

б) ошибку разности средних

$$s_d = s_{\bar{x}}\sqrt{2}; \tag{14.5}$$

в) наименьшую существенную разность

$$\text{НСР}_{\alpha,k_z} = t_{\alpha,k_z} s_d. \tag{14.6}$$

Сравнивая разности средних значений $\bar{X}_i$ по вариантам с НСР, делают вывод о существенности различий в уровне средних.

Пример 1. (Однофакторный дисперсионный анализ, равное число наблюдений.) Изучались четыре сорта озимого ячменя. Каждый сорт высевался на 5 участках одинаковой площади при случайном размещении сортов и повторений. Получены данные об урожайности озимого ячменя в расчете на 1 га посевной площади (табл. 14.3).

Таблица 14.3

Урожайность озимого ячменя, ц с 1 га

Сорт	Повторения					Сумма	Средняя урожайность, ц/га
	1	2	3	4	5	C_i	
Павел	57,4	55,2	56,6	53,9	56,9	280,0	56,0
Сармат	55,3	57,1	50,2	52,1	52,7	267,4	53,5

Сорт	Повторения					Сумма	Средняя урожай-ность, ц/га
	1	2	3	4	5	C_i	
Секрет	51,6	55,7	53,2	56,7	54,6	271,8	54,4
Хуторок	68,7	57,8	59,3	64,7	58,3	308,8	61,8
Сумма	233,0	225,8	219,3	227,4	222,5	1128,0	56,4

Проверяемая гипотеза H_0: отсутствие влияния фактора A сорта на урожайность озимого ячменя.

Решение. 1) Построение вспомогательной таблицы. Построим вспомогательную таблицу (табл. 14.4) для промежуточных вычислений сумм квадратов.

Таблица 14.4

Вспомогательные вычисления

i	C_i^2	X_{im}^2				
		1	2	3	4	5
1	78400,00	3294,76	3047,04	3203,56	2905,21	3237,61
2	71502,76	3058,09	3260,41	2520,04	2714,41	2777,29
3	73875,24	2662,56	3102,49	2830,24	3214,89	2981,16
4	95 357,44	4719,69	3340,84	3516,49	4186,09	3398,89
Сумма	319 135,44	13 735,1	12 750,78	12 070,33	13020,6	12 394,95

2) Вычисление вспомогательных сумм:

$$C^2 = \left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{n} X_{ij}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{a} C_i\right)^2 = 1128^2 = 1\,272\,384;$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{n} X_{ij}^2 = 13735{,}1 + 1270{,}78 + 120750{,}33 +$$

$$+13020{,}6 + 12394{,}95 = 63971{,}76;$$

$$\sum_{i=1}^{a} C_i^2 = 280^2 + 267{,}4^2 + 271{,}8^2 + 308{,}8^2 = 319135{,}44.$$

3) Вычисление сумм квадратов.

Общая сумма квадратов:

$$SS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{n} X_{ij}\right)^2 = C_0 - \frac{C^2}{N} =$$

$$= 63971{,}76 - \frac{1\,272\,384}{20} = 352{,}56.$$

Сумма квадратов между группами:

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a} n_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2 = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{X}_i - \bar{X})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{a} n_i\bar{X}_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{a} n_i\bar{X}_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{n} X_{ij}\right)^2 =$$

$$= \frac{a}{N}\sum_{i=1}^{a} C_i^2 - \frac{C^2}{N} = \frac{4}{20} * 319135{,}44 - \frac{1\,272\,384}{20} = 207{,}888.$$

Сумма квадратов внутри групп:

$$SS_Z = \sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{n} X_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a} n_i\bar{X}_i^2 =$$

$$= C_0 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} C_i^2 = 63971{,}76 - \frac{1}{5}319135{,}44 = 144{,}672.$$

Проверка: $SS_Z = SS - SS_a = 352{,}56 - 207{,}888 = 144{,}672.$

4) Вычисление оценок дисперсий.

$$s_A^2 = \frac{SS_A}{k_A} = \frac{207{,}888}{3} = 69{,}296;$$

$$s_Z^2 = \frac{SS_Z}{k_Z} = \frac{144{,}672}{16} = 9{,}042;$$

$$k_A = a - 1 = 4 - 1 = 3;\ k_Z = N - a = 20 - 4 = 16.$$

5) Проверка гипотезы:

$$F_{A\text{н}} = \frac{s_A^2}{s_Z^2} = \frac{69{,}296}{9{,}042} = 7{,}66;\ F_{\text{кр.}} = 3{,}24,$$

при $\alpha = 0{,}05; k_1 = 3; k_2 = 16.$

Результаты расчетов занесем в таблицу (табл. 14.5).

Таблица 14.5

Дисперсионный анализ различий в урожайности

Источник изменчивости	Сумма квадратов отклонений	Степени свободы	Средний квадрат отклонений	F	
				наблюдаемое	критическое
Различия между уровнями (сортов)	207,888	3	69,296	7,66	3,24
Различия внутри уровней (остаточная)	144,672	16	9,042		
Общая	352,56	19			

Наблюдаемое значение критерия сравнивается с критическим. Так как $F_{н.} > F_{кр.}$, то нулевая гипотеза об отсутствии влияния фактора сорта на урожайность озимого ячменя отвергается. Значит, имеется хотя бы одна статистически значимая разность в средней урожайности между сортами. Оценку частных различий между средними урожайностями проведем с помощью расчета наименьшей существенной разности.

Средняя ошибка опыта:

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{s_Z^2}{n}} = \sqrt{\frac{9{,}042}{5}} = 1{,}345.$$

Ошибка разности средних значений:

$$s_d = s_{\bar{X}}\sqrt{2} = 1,345 \cdot 1{,}414 \; = 1{,}902.$$

Наименьшая существенная разность:

$$\text{НСР} = t_{0{,}05;16} s_d = 2{,}12 \cdot 1{,}902 = 4{,}032 \approx 4{,}0.$$

Сравнивая средние урожайности по сортам между собой, можно заметить, что сорт озимого ячменя Хуторок существенно превосходит все другие по уровню средней урожайности. Различия в средней урожайности сортов Сармат, Павел и Секрет незначимы.

Пример 2. Рассмотрим решение примера 1 в пакете анализа (*MS Excel*). Выполним команду *Данные – Анализ данных – Однофакторный дисперсионный анализ*. Введём исходные данные в диапазон *A1*:*F5* листа *Excel*. Заполним параметры диалогового окна (рис. 14.1).

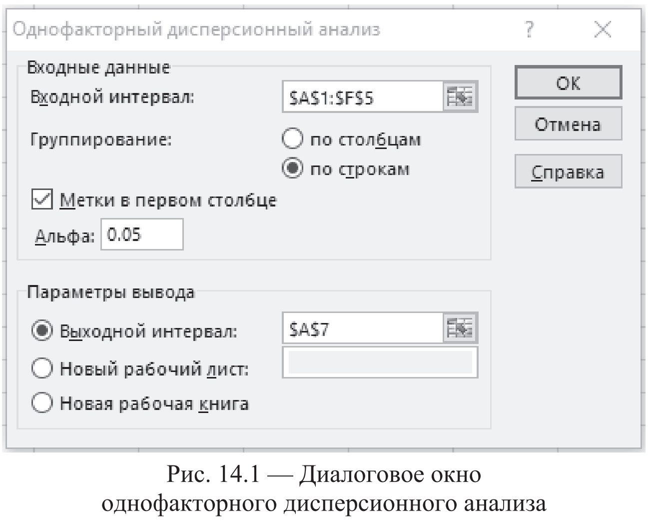


Рис. 14.1 — Диалоговое окно
однофакторного дисперсионного анализа

Группирование: по столбцам — именно такое расположение имеют уровни фактора *A*; отметим *Метки в первом столбце* (там расположены уровни фактора *A*); в Выходном интервале отметим A7, получим таблицу однофакторного дисперсионного анализа (табл. 14.6). $F_{н.} = 7{,}6638 > F_{кр.} = 3{,}2389$, поэтому гипотезу о несущественном влиянии фактора *A* на результат следует отвергнуть.

Таблица 14.6

Однофакторный дисперсионный анализ

Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия
Павел	5	280	56	2,045
Сармат	5	267,4	53,48	7,422
Секрет	5	271,8	54,36	4,073
Хуторок	5	308,8	61,76	22,628

Дисперсионный анализ

Источник вариации	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P*-значение	*F* критическое
Между группами	207,89	3	69,296	7,6638	0,0021	3,2389
Внутри групп	144,67	16	9,042			
Итого	352,56	19				

Пример 3. Проверить статистическую существенность влияния катализатора *A* на химическую реакцию, измерения при 5 уровнях фактора *A* в таблице:

A1	A2	A3	A4	A5
3,2	2,6	2,9	3,7	3,0
3,1	3,1	2,6	3,4	3,4
3,1	2,7	3,0	3,2	3,2
2,8	2,9	3,1	3,3	3,5
3,3	2,7	3,0	3,5	2,9
3,0	2,8	2,8	3,3	3,1

Введем данные в диапазон *A1*:*E7* листа *Excel* и заполним параметры диалогового окна (рис. 14.2), получим таблицу однофакторного дисперсионного анализа (табл. 14.7).

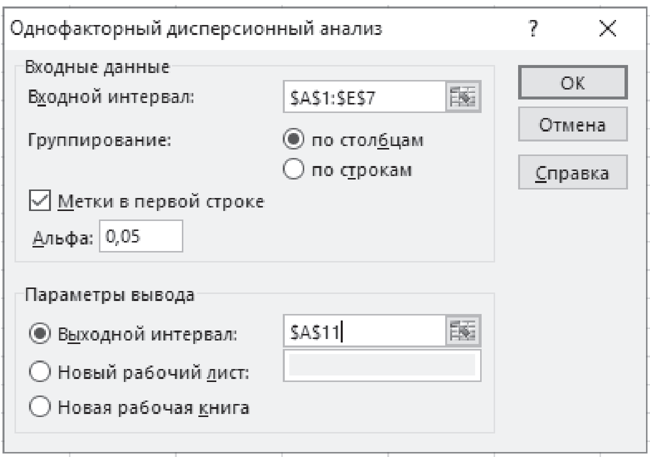


Рис. 14.2 — Диалоговое окно однофакторного дисперсионного анализа

Таблица 14.7

Однофакторный дисперсионный анализ

Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия
А1	6	18,5	3,0833	0,02967
А2	6	16,8	2,8	0,032
А3	6	17,4	2,9	0,032
А4	6	20,4	3,4	0,032
А5	6	19,1	3,1833	0,053666667

Дисперсионный анализ

Источник вариации	SS	df	MS	F	P-значение
Между группами	1,342	4	0,335	9,3541	9,16424E-05
Внутри групп	0,89667	25	0,035		
Итого	2,238667	29			

$F_{\text{н.}} = 9{,}3541 > F_{\text{кр.}} = 2{,}7587$, поэтому гипотезу о несущественном влиянии фактора A на результат следует отвергнуть.

Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями. Он представляет собой более сложный вариант однофакторного анализа, включающего более чем одну выборку для каждой группы данных. Двухфакторный дисперсионный анализ позволяет статистически обосновать существенность влияния факторных признаков A и B и взаимодействия факторов (A и B) на результативный фактор F.

Пример 4. У 60 рабочих фиксировалась среднечасовая выработка в натуральных единицах продукции (табл. 14.8). Выполним команду *Данные — Анализ данных — Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями* (рис. 14.3).

Таблица 14.8

Исходные данные

	A	*B*	*C*	*D*
1	Стаж	Возраст		
2		от 25 до 35 лет	от 35 до 45 лет	от 45 до 55 лет
3	от 1 до 4 лет	19	19	18
4		20	20	19
5		20	20	20
6		20	23	21
7		22	25	23
8	от 4 до 7 лет	30	20	19
9		31	29	25
10		32	30	25
11		32	31	26
12		34	31	26

Продолжение табл. 14.8

	A	*B*	*C*	*D*
13	от 7 до 10 лет	35	36	24
14		35	40	24
15		39	41	24
16		40	42	25
17		41	45	25
18	свыше 10 лет	40	28	20
19		40	31	24
20		41	35	25
21		41	36	31
22		42	40	32

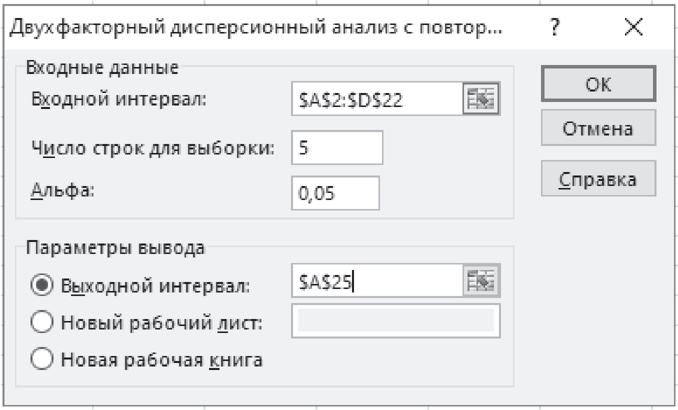


Рис. 14.3 — Диалоговое окно двухфакторного дисперсионного анализа с повторениями

Получим итоговую таблицу 14.9.

Таблица 14.9

Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями

ИТОГИ	От 25 до 35 лет	От 35 до 45 лет	От 45 до 55 лет	Итого
От 1 до 4лет				
счет	5	5	5	15
сумма	101	107	101	309
среднее	20,2	21,4	20,2	20,6
дисперсия	1,2	6,3	3,7	3,54286
От 4 до 7 лет				
счет	5	5	5	15
сумма	159	141	121	421
среднее	31,8	28,2	24,2	28,0667
дисперсия	2,2	21,7	8,7	19,6381

ИТОГИ	От 25 до 35 лет	От 35 до 45 лет	От 45 до 55 лет	Итого
От 4 до 7 лет				
счет	5	5	5	15
сумма	190	204	122	516
среднее	38	40,8	24,4	34,4
дисперсия	8	10,7	0,3	60,4
Свыше 10 лет				
счет	5	5	5	15
сумма	204	170	132	506
среднее	40,8	34	26,4	33,7333
дисперсия	0,7	21,5	25,3	50,6381
Итого				
Счет	20	20	20	
Сумма	654	622	476	
Среднее	32,7	31,1	23,8	
Дисперсия	68,53684211	66,621053	13,3263158	

Дисперсионный анализ

Источник вариации	SS	df	MS	F	P-значение	F критическое
Выборка	1842,5333	3	614,1778	66,8190	3,70226E-17	2,7980
Столбцы	900,4	2	450,2	48,9791	2,56035E-12	3,1907
Взаимодействие	537,4667	6	89,5778	9,7455	5,19758E-07	2,2946
Внутри	441,2	48	9,1917			
Итого	3721,6	59				

Дисперсионный анализ с повторениями позволяет оценить существенность влияния фактора A (стаж), B (возраст) и их взаимодействия (факторы A и B) на среднечасовую выработку продукции в натуральных единицах.

Так как

$$F_{A\text{расч.}} = 66{,}819 > F_{A\text{кр.}} = 2{,}798;$$

$$F_{B\text{расч.}} = 48{,}979 > F_{B\text{кр.}} = 3{,}190;\ F_{AB\text{расч.}} = 9{,}746 > F_{AB\text{кр.}} = 2{,}294,$$

то следует признать статистически значимым влияние стажа (фактор A), возраста (фактор B) и их взаимодействия (факторы A и B) на производительность труда рабочих. Итоговая таблица позволяет более детально рассмотреть свойства отдельных групп (например, возраст от 35 до 45 лет и стаж от 4 до 7 лет).

Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений позволяет оценить существенность воздействия факторов A и B на результирующий фактор без учёта воздействия взаимодействия факторов A и B.

Пример 5. Рассмотрим решение примера 4, взяв в каждой ячейке среднее значение наблюдений (усреднив повторности).

Таблица 14.10

Исходные данные

Стаж	Возраст		
	от 25 до 35 лет	от 25 до 35 лет	от 25 до 35 лет
от 1 до 4 лет	20,2	21,4	20,2
от 4 до 7 лет	31,8	28,2	24,2
от 7 до 10 лет	38	40,8	24,4
свыше 10 лет	40,8	34	26,4

Выполним команду *Данные — Анализ данных — Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений.* В результате заполнения диалогового окна (аналогичного окну примера 4) получим итоговую таблицу двухфакторного дисперсионного анализ без повторений (табл. 14.11).

Таблица 14.11

Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений

ИТОГИ	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия		
от 1 до 4 лет	3	61,8	20,6	0,48		
от 4 до 7 лет	3	84,2	28,06667	14,4533333		
от 7 до 10 лет	3	103,2	34,4	76,96		
свыше 10 лет	3	101,2	33,73333	51,8933333		
от 25 до 35 лет	4	130,8	32,7	83,5866667		
от 25 до 35 лет	4	124,4	31,1	68,3333333		
от 25 до 35 лет	4	95,2	23,8	6,74666667		

Дисперсионный анализ

Источник вариации	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P*-значение	*F* критическое
Строки	368,507	3	122,8356	6,8564	0,0230	4,7570
Столбцы	180,08	2	90,04	5,0258	0,0522	5,1432
Погрешность	107,493	6	17,91556			
Итого	656,08	11				

Имеем:

$$F_{\text{Арасч.}} = 6{,}8564 > F_{\text{А кр.}} = 4{,}7570,$$

$$F_{\text{Врасч.}} = 5{,}0258 < F_{\text{Вкр.}} = 5{,}1432.$$

Результаты дисперсионного анализа свидетельствуют о том, что фактор *A* (стаж) существенно влияет на производительность труда, а фактор *B* (возраст) статистически существенного влияния не оказывает.

Различие в выводах примеров *4* и *5* можно объяснить тем, что в примере *5* мы не учитывали конкретные наблюдения в ячейках, а рассматривали лишь их среднее значение. Поэтому результат дисперсионного анализа с повторениями является более значимым, что соответствует и самому смыслу задачи.

1. Оценить существенность различий в успеваемости студентов по четырем предметам и четырем группам. Численность студентов в каждой группе составляет 25 человек.

Таблица 14.12

Уровень успеваемости студентов, балл

Предмет	Группа студентов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4,3	4,1	4,1	4,2	4,4	4,5	4,0	4,3
2	4,2	4,0	3,9	4,0	4,3	4,3	3,7	3,9
3	4,4	4,5	4,2	4,2	4,3	4,3	4,4	4,4
4	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,4	4,1	4,2
5	3,6	3,7	3,5	3,8	4,0	3,7	3,4	3,9

2. Доказывает ли опыт влияние различных доз удобрений на урожайность озимой пшеницы.

Таблица 14.13

Урожайность озимой пшеницы с 1 га по участкам равной площади, ц

Доза удобрений	Повторения							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	39	39	37	41	36	38	43	40
2	41	40	39	40	38	38	41	42
3	42	40	39	42	40	39	43	45
4	47	45	43	42	40	41	45	50
5	55	50	60	48	54	53	61	53
6	67	60	64	66	63	70	72	67
7	73	70	77	79	76	65	64	68
8	62	60	57	63	49	51	61	56
9	81	86	74	78	83	80	79	85

3. Оценить различия в среднемесячной начисленной заработной плате механизаторов различной квалификации.

Таблица 14.14

Среднемесячная заработная плата механизаторов, тыс. руб.

Класс механизаторов	Бригада									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	48,5	43,8	45,4	42,9	41,8	45,4	43,7	44,9	42,8	46,8
II	39,1	36,8	37,2	36,9	38,3	35,0	36,5	37,0	35,4	40,1
III	34,1	35,1	31,2	29,2	35,1	34,0	28,5	34,3	27,8	29,8

4. По четырем сортам, трем дозам минеральных удобрений и пяти повторениям оценить существенность влияния различных сортов, доз удобрений и их взаимодействия на урожайность риса.

Таблица 14.15

Урожайность риса с 1 га, ц

Сорт	Доза удобрений	Повторение							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1 2 3	42 44 58	39 47 55	44 46 53	41 45 50	38 43 56	39 42 57	37 41 54	42 44 53
2	1 2 3	45 49 57	42 47 56	44 49 55	40 47 50	44 45 47	43 47 45	46 48 47	45 47 47
3	1 2 3	59 68 67	42 51 59	44 55 65	41 53 63	42 51 62	40 54 60	42 53 64	40 49 60
4	1 2 3	41 48 52	44 49 49	39 46 47	40 51 50	43 52 50	1 49 48	43 46 47	45 51 50
5	1 2 3	38 49 53	40 52 58	39 50 49	42 52 50	44 48 50	43 49 53	40 50 49	41 54 50
6	1 2 3	42 49 68	41 52 66	43 53 65	41 53 69	39 50 70	40 54 72	44 53 73	42 53 76
7	1 2 3	64 72 88	61 74 85	66 70 89	64 69 80	68 73 79	67 69 78	61 72 83	63 71 86

5. Оценить существенность различий уровня производительности механизаторов при культивации в различных хозяйствах по пропашным культурам и стажу работы механизаторов.

Таблица 14.16

Объем выполненных работ механизаторами
за 1 ч работы, эталонных га

Сельскохозяйственная культура	Стаж работы, лет	Хозяйство			
		1	2	3	4
Кукуруза на зерно	до 5 от 5 до 10 от 10 до 15	0,75 1,40 1,25	0,9 1,55 1,35	0,95 1,35 1,35	1,00 1,50 1,40
Кукуруза на силос	до 5 от 5 до 10 от 10 до 15	0,85 1,50 1,35	0,95 1,40 1,40	0,85 1,55 1,55	1,10 1,45 1,50
Подсолнечник	до 5 от 5 до 10 от 10 до 15	0,80 1,35 1,45	0,90 1,45 1,40	0,75 1,35 1,30	0,85 1,40 1,30

15. Корреляционно-регрессионный анализ

Корреляционно-регрессионный анализ — это совокупность статистических и математических методов, позволяющих оценить степень зависимости между результативными и факторными признаками, а также найти аналитическое выражение зависимости.

Корреляционно-регрессионный анализ проводится в следующей последовательности.

1. Исходя из целей и задач исследования зависимости устанавливается результативный (Y) признак и факторные (X_i) признаки.

2. По совокупности объектов определяются значения результативного и факторных признаков.

3. Обосновывается, обычно графическим методом, модель в виде уравнения регрессии.

4. Методом наименьших квадратов рассчитываются параметры уравнения регрессии.

5. Определяется теснота связи между изучаемыми признаками.

6. Оценивается значимость уравнения связи, его параметров и показателей тесноты связи.

При изучении влияния одного фактора X на изменение результативного признака Y линейное уравнение регрессии имеет вид: $y = a + bx$.

Его параметры находятся методом наименьших квадратов путем составления и решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum y = nb_0 + b_1 \sum x, \\ \sum xy = b_0 \sum x + b_1 \sum x^2 \end{cases}, \text{ или } b_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}, b_0 = \frac{\sum y}{n} - b\frac{\sum x}{n}. \quad (15.1)$$

В линейном уравнении регрессии b — коэффициент регрессии, который показывает, на сколько единиц в среднем изменяется результативный признак X при увеличении факторного признака Y на единицу.

При линейной зависимости для оценки тесноты связи между признаками используется коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}. \quad (15.2)$$

Статистическая гипотеза $H_0: r = 0, H_1: r \neq 0$ при уровне значимости α проверяется с использованием критерия Стьюдента:

$$t_{\text{н}} = |r|\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}. \quad (15.3)$$

Критическое значение t находится по таблице распределения t-критерия Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $k = n - 2$ для двусторонней критической области. Если $t_{\text{н.}} > t_{\text{кр.}}$, то нулевая гипотеза отвергается, коэффициент корреляции существенно отличен от нуля в генеральной совокупности. Если $t_{\text{н.}} < t_{\text{кр.}}$, то нулевая гипотеза принимается и влияние фактора X на Y статистически незначимо.

$D = r^2 \cdot 100\%$ — коэффициент детерминации, показывает, какая часть общей колеблемости результативного признака объясняется влиянием факторного признака.

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменится результативный признак Y при изменении факторного признака X на 1%. Он рассчитывается по формуле

$$Э = b\frac{\bar{x}}{\bar{y}}. \qquad (15.4)$$

Теснота связи, в случае нелинейной зависимости, выраженной уравнением регрессии $\hat{y} = f(x_i)$, определяется с помощью индекса (коэффициента) корреляции R:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y}_i)^2}}, 0 \leq R \leq 1. \qquad (15.5)$$

Статистическая значимость индекса корреляции оценивается с помощью F-критерия Фишера при уровне значимости α с $k_1 = m$ — числом степеней свободы числителя и $k_2 = n - m - 1$ — числом степеней свободы знаменателя ($F_{\text{кр}} = F_\alpha(k_1, k_2)$).

$$F_{\text{н}} = \frac{R^2}{1 - R^2} : \frac{m}{n - m - 1}, \qquad (15.6)$$

где m — число параметров уравнения регрессии, n — число наблюдений.

Если $F_{\text{н}} > F_{\text{кр}}$, то гипотеза о том, что R не является статистически значимым, отклоняется ($H_0: R = 0,\ H_1: R \neq 0$).

В зависимости от числа признаков, между которыми изучается связь, различают парную (между результативным и факторным признаком, тогда $R = -|r|$) и множественную (между результативным и двумя и более факторными признаками).

Пример 1. По совокупности сельскохозяйственных организаций имеются выборочные данные о фондовооруженности работника, тыс. руб., X и стоимости валовой продукции на 100 га с.-х. угодий, тыс. руб., Y. Требуется:

1. Построить график зависимости между переменными, по которому необходимо подобрать вид уравнения регрессии.

2. Рассчитать параметры уравнения регрессии методом наименьших квадратов.

3. Найти коэффициент эластичности.

4. Оценить тесноту связи между переменными с помощью показателей корреляции и детерминации.

5. Оценить значимость коэффициентов корреляции и регрессии по t-критерию Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

6. Охарактеризовать статистическую надежность результатов регрессионного анализа с использованием F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

7. Определить прогнозное значение результативного признака, если возможное значение факторного признака составит 1,5 от его среднего уровня по совокупности.

Решение. 1. График зависимости переменных X и Y строится в прямоугольной системе координат. На график наносятся точки, координаты которых соответствуют значениям X и Y (рис. 15.13). Характер расположения точек на графике показывает, что связь между переменными может выражаться линейным уравнением регрессии:

$$\hat{y}_x = b_0 + b_1 x.$$

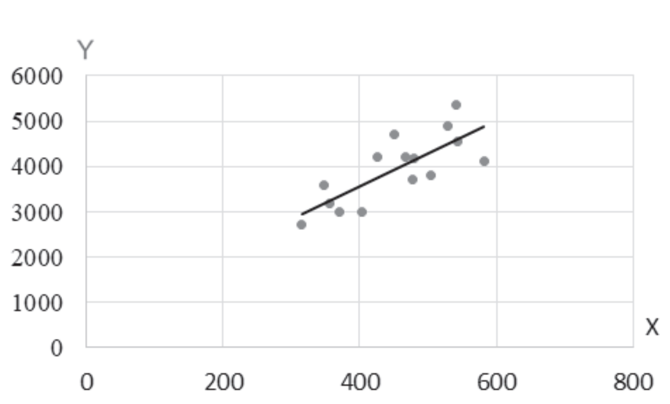


Рис. 15.1 — Зависимость стоимости валовой продукции на 100 га с.-х. угодий от фондовооруженности

2. Визуализация наблюдений позволяет предположить, что зависимость имеет линейный характер. Параметры уравнения регрессии находим методом наименьших квадратов путем составления и решения системы нормальных уравнений (15.1). Для проведения всех расчетов строится вспомогательная таблица 15.1.

Таблица 15.1

Вспомогательная таблица регрессионного анализа

№ п/п	X	Y	X^2	XY	Y^2	$\hat{Y}$	$(Y-\hat{Y})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$
1	315	2715	99225	855225	7371225	2948,63	54584,3787	1524731
2	479	4190	229441	2007010	17556100	4144,23	2095,27739	57696,04
3	467	4219	218089	1970273	17799961	4056,74	26327,2042	72468,64
4	355	3193	126025	1133515	10195249	3240,24	2231,71208	572746,24
5	450	4699	202500	2114550	22080601	3932,81	587047,116	561300,64
6	347	3574	120409	1240178	12773476	3181,92	153727,197	141225,64
7	503	3806	253009	1914418	14485636	4319,19	263364,592	20678,44

Продолжение табл. 15.1

№ п/п	X	Y	X^2	XY	Y^2	$\hat{Y}$	$(Y-\hat{Y})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$
8	529	4891	279841	2587339	23921881	4508,74	146125,919	885857,44
9	581	4120	337561	2393720	16974400	4887,83	589557,073	28968,04
10	370	2989	136900	1105930	8934121	3349,59	130028,033	923136,64
11	477	3722	227529	1775394	13853284	4129,65	166174,772	51892,84
12	542	4544	293764	2462848	20647936	4603,51	3541,24967	353073,64
13	404	3005	163216	1214020	9030025	3597,46	351009,8	892647,04
14	541	5364	292681	2901924	28772496	4596,22	589488,892	1999961,6
15	425	4216	180625	1791800	17774656	3750,56	216639,048	70862,44
Итого	6785	59247	3E+06	27468144	242171047	—	3281942,26	8157246,4
В среднем	452,33	3949,8	210721	1831210	16144736,5	—	—	—

В таблице все средние находятся по формуле средней арифметической простой: $\overline{X} = \sum_x / n$.

Подставим полученные суммы в систему уравнений, учитывая, что $n = 15$.

$$\begin{cases} 3949{,}8 = 15b_0 + 452{,}33b_1, \\ 1\,831\,210 = 452{,}333b_0 + 210\,721b_1. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$b_0 = 652{,}22;\ b_1 = 7{,}29.$$

Таким образом, уравнение регрессии имеет вид

$$\hat{y}_x = 652{,}22 + 7{,}29x.$$

Коэффициент регрессии показывает, что при увеличении фондовооруженности на 1 тыс. руб. стоимость валовой продукции на 100 га с.-х. угодий в среднем увеличивается на 7290 руб.

Если в уравнение регрессии подставить фактические значения переменной X, то определяются возможные (теоретические) значения переменной $\hat{y}$, которые наносятся на график в виде уравнения прямой (рис. 15.1).

3. При линейной форме связи средний коэффициент эластичности составит

$$Э = 7{,}29\frac{452{,}33}{3949{,}8} = 0{,}835.$$

Коэффициент эластичности показывает, что при увеличении фондовооруженности работника на 1% стоимость валовой продукции на 100 га с.-х. угодий в среднем увеличивается на 0,83%.

4. При линейной зависимости теснота связи между переменными X и Y определяется с помощью коэффициента корреляции по формуле (15.2).

Используя результаты таблицы 15.1, получим

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \sqrt{210\,721 - 452{,}33^2} = 78{,}202,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2} = \sqrt{16144736{,}467 - 3949{,}8^2} = 737{,}439,$$

$$r_{xy} = \frac{44583{,}4 - 452{,}33 \cdot 3949{,}8}{78{,}202 \cdot 737{,}439} \approx 0{,}773.$$

Значение коэффициента корреляции показывает, что между признаками имеется тесная связь, прямая, близкая к линейной функциональной.

Коэффициент детерминации $r^2 = 0{,}773^2 = 0{,}598$ показывает, что 59,8% различий в стоимости валовой продукции на 100 га с.-х. угодий объясняется вариацией фондовооруженности, а 41,2% — другими, не учтенными факторами.

5. Так как исходные данные являются выборочными, то необходимо оценить существенность или значимость величины коэффициента корреляции. Выдвигаем нулевую гипотезу: коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю, и изучаемый фактор не оказывает существенного влияния на результативный признак. $\text{H}_0: r = 0$ при $\text{H}_0: r \neq 0$.

Для проверки нулевой гипотезы применим *t*-критерий Стьюдента.

Найдем наблюдаемое значение *t*-критерия:

$$t_{\text{н.}} = |r| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = |0{,}773| \cdot \sqrt{\frac{15-2}{1-0{,}598^2}} = 3{,}48.$$

Критическое значение *t* находится по таблице *t*-распределения Стьюдента (прил. 3) при уровне значимости α = 0,05 и числе степеней свободы:

$$k = n - 2 = 15 - 2 = 13,$$

для двухсторонней критической области

$$t_{\text{кр.}} = 2{,}16.$$

Так как $t_{\text{н.}} > t_{\text{кр.}}$, то нулевая гипотеза отвергается, коэффициент корреляции существенно отличен от нуля в генеральной совокупности. Значит, фондообеспеченность оказывает статистически существенное влияние стоимость валовой продукции.

Статистическая значимость коэффициента регрессии также проводится с использованием *t*-критерия Стьюдента.

Находится наблюдаемое значение критерия $t_{\text{н.}} = \frac{b_1}{m_{b_1}}$, где m_{b_1} — средняя ошибка коэффициента b_1, вычисляется по формуле

$$m_{b_1} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-2)\sum(x_i - \bar{X})^2}} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-2)\sigma_x^2 n}}. \qquad (15.7)$$

Критическое значение *t* также равно 2,16. Проверьте самостоятельно, что $t_{\text{н.}} > t_{\text{кр.}}$ и коэффициент регрессии статистически значим.

6. Статистическая надежность уравнения регрессии проверяется с использованием F-критерия Фишера.

Наблюдаемое значение критерия находится по формуле

$$F_{\text{н.}} = \frac{\frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{p}}{\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p-1}}, \qquad (15.8)$$

где p — число параметров при переменных X.

Если применяется парное линейное уравнение регрессии, то расчет $F_{\text{н.}}$ упрощается:

$$F_{\text{н.}} = \frac{r^2}{1-r^2}(n-2) = \frac{0{,}598}{1-0{,}598}\,(15-2) = 19{,}34.$$

По таблице приложения 4 находится критическое значение F-критерия, при числе степеней свободы $k_1 = p = 1, k_2 = n - p - 1 = 13$ и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$: $F_{\text{кр.}} = F_{0{,}05}(k_1 = 1, k_2 = 13) = 4{,}67$.

Так как $F_{\text{н.}} > F_{\text{кр.}}$, то уравнение регрессии статистически значимое или надежное. При парной линейной зависимости оценка значимости всего уравнения, коэффициентов корреляции и регрессии дает одинаковые результаты, так как

$$t_{b_1}^2 = t_r^2 = F_\alpha(k_1, k_2).$$

7. Прогнозное значение результативного признака определяется путем подстановки в уравнение регрессии прогнозного или возможного значения факторного признака (x_p).

По условию $x_p = 452{,}33 \cdot 1{,}5 = 678{,}495$, значит, при фондовооруженности работника на 678,5 тыс. руб. прогнозное значение стоимости валовой продукции на 100 га с.-х. угодий составит 5598,5 тыс. руб., так как

$$\hat{y}_x = b_0 + b_1 x = 652{,}22 + 7{,}29 \cdot 678{,}5 = 5598{,}5.$$

В пакете анализа *MS Excel* инструмент *Регрессия* подбирает линейную функцию с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Основные параметры диалогового окна: входной интервал Y — диапазон анализируемых зависимых данных (диапазон должен состоять из одного столбца); входной интервал X — диапазон независимых данных (находящихся в соседних столбцах), подлежащих анализу, *Excel* располагает независимые переменные этого диапазона слева направо в порядке возрастания. Максимальное число входных диапазонов равно 16. При необходимости можно сформировать и нелинейную функцию.

Пример 2. Исследовать влияние фондовооруженности и энергообеспеченности на стоимость валовой продукции. Результативным признаком (Y) является стоимость валовой продукции на 100 га сельхозугодий, тыс. руб., которая характеризует затраты на производство продукции. Факторные признаки: $X1$ — фондовооруженность 1-го работника, характеризующая стоимость основных фондов, в расчете на одного работника (тыс. руб.); $X2$ — энергообеспеченность на 100 га сельхозугодий, л. с., выражающая мощность энергетических ресурсов на 100 га сельхозугодий (рис. 15.2).

	A	B	C
1	Стоимость валовой продукции на 100 га с.-х. угодий	Фондовооруженность 1-го работника, тыс. руб.	Энергообеспеченность на 100 га с.-х. угодий, л.с.
2	Y	X1	X2
3	2715	315	255
4	4190	479	309
5	4219	467	315
6	3193	355	180
7	4699	450	255
8	3574	347	229
9	3806	503	307
10	4891	529	343
11	4120	581	199
12	2989	370	205
13	3722	477	243
14	4544	542	321
15	3005	404	212
16	5364	541	320
17	4216	425	246

Рис. 15.2 — Вид исходных данных в *MS Excel*

Требуется определить: параметры множественного уравнения регрессии в натуральной и стандартизованной форме; коэффициенты частной и множественной корреляции; общий и частные F-критерии Фишера — Снедекора.

Уравнение регрессии примет вид:

$$y = b_0 + b_1x1 + b_2x2 + \varepsilon.$$

Выберем в *Пакете анализа* инструмент *Описательная статистика*, заполним параметры диалогового окна (рис. 15.3) и получим результаты, отраженные в таблице 15.2.

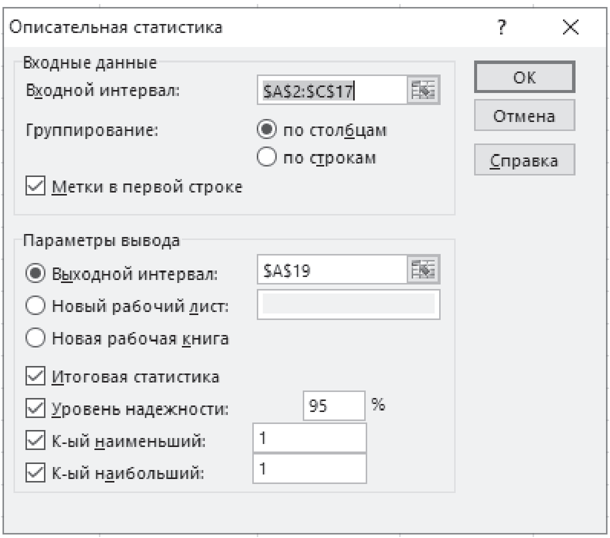


Рис. 15.3 — Диалоговое окно инструмента *Описательная статистика*

Таблица 15.2

Результаты применения инструмента *Описательная статистика*

Числовые характеристики	Y	$X1$	$X2$	Принятые обозначения
Среднее	3949,800	452,333	262,600	$\overline{X}=\sum x_i n_i / n$
Стандартная ошибка	197,089	20,900	13,573	$S_{\overline{X}}=s/\sqrt{n}$
Медиана	4120	467	255	Me
Мода	#Н/Д	#Н/Д	255	Mo
Стандартное отклонение	763,322	80,947	52,569	s
Дисперсия выборки	582660,457	6552,381	2763,543	$s^2=\sum(x_i-\overline{X})^2 n_i/(n-1)$
Эксцесс	–0,674	–1,048	–1,434	$Ex=\sum\left((x_i-\overline{X})/s\right)^4 n_i/n-3$
Асимметричность	0,0436	–0,187	0,027	$Ka=\sum\left((x_i-\overline{X})/s\right)^3 n_i/n$
Интервал	2649	266	163	$R=x_{max}-x_{min}$
Минимум	2715	315	180	x_{min}
Максимум	5364	581	343	x_{max}
Сумма	59 247	6785	3939	$\sum x_i$
Счет	15	15	15	$n=\sum n_i$
Наибольший (1)	5364	581	343	—
Наименьший (1)	2715	315	180	—
Уровень надежности (0,95)	422,714	44,827	29,112	$\Delta=t_{\alpha;(n-1)}S_{\bar{X}}$

Для нахождения парных коэффициентов корреляции применим инструмент пакета анализа *Корреляция*, для этого заполним параметры диалогового окна, как на рисунке 15.4, получим парные коэффициенты корреляции (табл. 15.2).

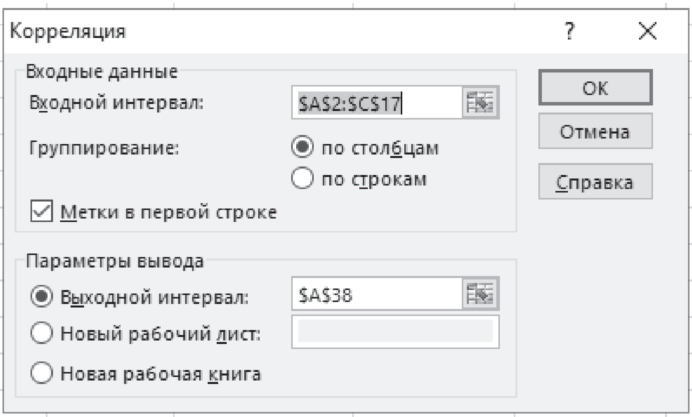


Рис. 15.4 — Диалоговое окно инструмента *Корреляция*

Таблица 15.3

Парные коэффициенты корреляции между признаками

Переменная	Y	X_1	X_2
Y	1		
X_1	0,773088239	1	
X_2	0,679291686	0,543201832	1

$$r_{yx1} = 0{,}7731; r_{yx2} = 0{,}6793;\ r_{x1x2} = 0{,}5432.$$

Парные коэффициенты корреляции свидетельствуют о тесной связи между факторными и результативным признаками, что дает основание включить данные факторы в уравнение регрессии.

Найдем параметры уравнения регрессионной зависимости стоимости валовой продукции от фондовооруженности и энергообеспеченности, используя инструмент Пакета анализа *Регрессия*. Заполним параметры диалогового окна (рис. 15.5).

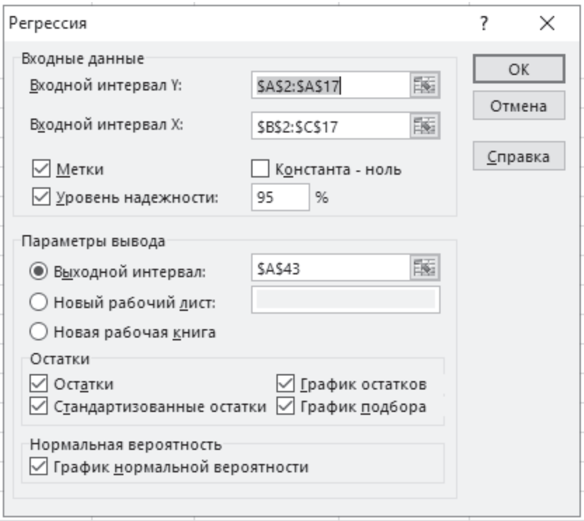


Рис. 15.5 — Диалоговое окно инструмента *Регрессия*

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,8325
R-квадрат	0,6931
Нормированный R-квадрат	0,6419
Стандартная ошибка	456,7649
Наблюдения	15

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	2	5653635,9426	2826817,9713	13,5492	0,0008
Остаток	12	2503610,4574	208634,2048		
Итого	14	8157246,4000			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	101,8240	748,6362	0,1360	0,8941	-1529,3142	1732,9621
X1	5,4056	1,7962	3,0095	0,0109	1,4920	9,3192
X2	5,3421	2,7658	1,9315	0,0774	-0,6841	11,3683

Рис. 15.6 — Вывод итогов регрессионного анализа

Получим линейное уравнение множественной регрессии (рис. 15.6):

$$y = 101{,}824 + 5{,}406x1 + 5{,}342x2.$$

Коэффициенты множественной регрессии показывают, что при увеличении фондовооруженности на 1 тыс. руб. стоимость валовой продукции в среднем повысится на 5406 руб., а при увеличении энергообеспеченности на 1 л. с. в расчете на 100 га с.-х. угодий стоимость производства валовой продукции увеличится на 5342 руб.

Коэффициент множественной корреляции находится по формуле

$$R = \sqrt{\frac{\sum(\bar{y}-\hat{y})^2}{\sum(y_i-\hat{y})^2}} = \sqrt{\frac{5653635{,}943}{8157246{,}4}} = \sqrt{0{,}6931} = 0{,}8325.$$

Величина коэффициента множественной корреляции показывает, что связь между Y, $X1$ и $X2$ довольно тесная, причем 69,3% вариации стоимости валовой продукции объясняется вариацией фондовооруженности и энергообеспеченности.

Оценим значимость уравнения регрессии и коэффициента R^2 с помощью F-критерия Фишера. Фактически рассматривается нулевая гипотеза

$$H_0\colon R^2 = 0\ (b_1 = b_2 = 0)$$

и альтернативная гипотеза

$$H_0\colon R^2 \neq 0\ (\text{хотя бы } b_1 \neq 0 \text{ или } b_2 \neq 0).$$

Наблюдаемое или фактическое значение критерия находится по формуле (15.6):

$$F_{\text{н}} = \frac{0{,}6931}{1-0{,}6931} : \frac{2}{15-2-1} \approx 13{,}5.$$

Таким образом, при уровне значимости α = 0,05 и числе степеней свободы числителя $k_1 = m = 2$ и знаменателя $k_2 = n - m - 1 = 15 - 2 - 1$ по таблице значений F-критерия Фишера — Снедекора (или в *MS Excel*: «=F.ОБР(0,95;2;12»)) найдем критическое значение $F_{\text{кр}} \approx 3{,}89$. Так как $F_{\text{н}} > F_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу о незначимости величины R^2 отклоним, т. е. уравнение множественной регрессии и R^2 статистически значимы.

График парных зависимостей (при выделенном диапазоне (XY) команда: *Вставка — Точечная диаграмма*; выбрав на диаграмме точку, контекстное меню, команда: *Добавить линию тренда*) приведен на рисунке 15.7.

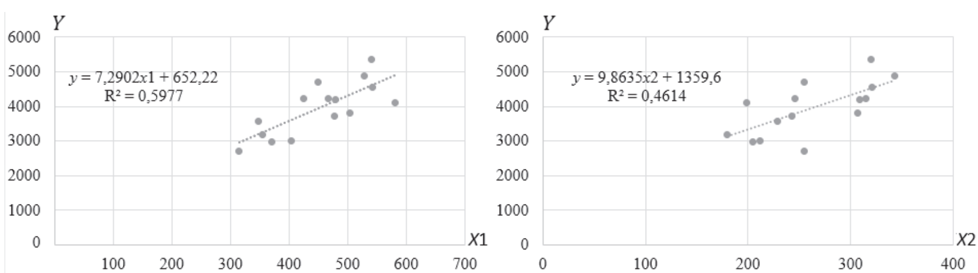


Рис. 15.7 — Графики парных зависимостей

Значит, при увеличении фондовооруженности одного работника на 1 тыс. руб. производство валовой продукции увеличивается на 7290 руб. Полученное уравнение объясняет 59,8% различий в стоимости валовой продукции (что на 9,5% меньше, чем уравнении с двумя факторами). При увеличении энерговооруженности на 1 л. с. производство валовой продукции увеличивается на 9863 руб. Полученное уравнение объясняет 46,1% различий в стоимости валовой продукции. Очевидно, что факторы взаимосвязаны, поэтому возникает проблема мультиколлинеарности, но значение $r_{x1x2} = 0,5432 < 0{,}7$ позволяет отбросить эту проблему.

Замечание. Рекомендуется провести эксперимент с данными на рисунке 15.7 и линией тренда, чтобы оценить, как влияют ошибки ввода данных (выбросы, артефакты, точки разбалансировки) на модель, что требует визуализации и очистки данных, воплощенных в разведочном анализе данных (РАД, *EDA — exploratory data analysis, англ.*).

1. Данные опыта приведены в таблице:

X_i	2	4	6	8	10	12	14
Y_i	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0	8,5	9,5

Полагая, что переменные X и Y связаны зависимостью вида $y = a + bx$, найти коэффициенты a и b способом наименьших квадратов.

2. Дана таблица результатов наблюдений:

X_i	2	4	6	8	10	12	14
Y_i	3,5	6,0	7,0	6,0	7,5	8,5	10

Найти выборочный коэффициент корреляции и определить его значимость. Определить параметры линейного уравнения регрессии.

3. В «Основах химии» Д. И. Менделеева (1906) приводятся данные о растворимости азотнокислого натрия $NaNO_3$ в зависимости от температуры воды. В 100 частях воды растворяется следующее число условных частей $NaNO_3$ при соответствующих температурах:

x, °C	0	4	10	15	21	29	36	51	68
y	66,7	77,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

С помощью МНК получить линейную зависимость x от y (ответ был указан Д. И. Менделеевым в 1881 г.).

4. При изучении движения уличного транспорта были получены данные о пройденном расстоянии автомобиля до остановки после торможения в зависимости от скорости (данные переведены из английской системы мер в метрическую), рассматривалось 50 наблюдений:

Скорость, км/ч	Пройденное расстояние, м
6,44	0,61; 3,05
11,26	1,22; 6,71
12,87	4,88
14,48	3,05

Продолжение табл.

Скорость, км/ч	Пройденное расстояние, м
16,09	7,93; 5,49; 10,37
17,70	8,54; 5,18
19,31	6,10; 4,27; 7,32; 8,54
20,92	10,37; 7,93; 10,37; 14,03
22,53	10,98; 7,93; 18,30; 24,40
24,14	16,47; 7,93; 6,10
25,74	9,76; 12,20
27,35	15,25; 12,20; 9,76
28,96	17,08; 25,62; 23,18; 12,81
30,57	20,74; 14,03; 10,98
32,18	14,64; 17,08; 19,52; 15,86; 9,76
35,40	20,13
37,01	16,47
38,62	28,36; 21,35; 36,60; 28,06
40,23	25,92

Рассмотреть линейную и параболическую зависимости.

5. Производится наблюдение над двумя переменными — содержанием протеина x в зернах пшеницы и процентным содержанием y темных стеклянистых ядрышек в тех же зернах.

Обе переменные характеризуют качество пшеницы, но определение x требует сложного химического анализа, а определение y может быть сделано гораздо проще без приборов. Произведите выравнивание этих наблюдений по параболе второго порядка.

№ п/п	Содержание протеина, %	Содержание стеклянистых ядрышек, %
1	10,3	6
2	12,2	75
3	14,5	87
4	11,1	55
5	10,9	34
6	18,1	98
7	14,0	91
8	10,8	45
9	11,4	51
10	11,0	17
11	10,2	36
12	17,0	97
13	13,8	74
14	10,1	24
15	14,4	85

Продолжение табл.

№ п/п	Содержание протеина, %	Содержание стеклянистых ядрышек, %
16	15,8	96
17	15,6	92
18	15,0	94
19	13,3	84
20	19,0	99

6. Рейтинг 9 банков был оценен тремя экспертами. С помощью коэффициента ранговой корреляции найти пары экспертов, оценки которых наиболее близко соответствуют друг другу. Оценить значимость различий в оценке рейтинга банков экспертами.

Рейтинг банков (номер предпочтительности)

Эксперт	Номер банка								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	2	1	4	5	6	7	8	9
2	2	3	1	4	7	9	8	5	6
3	1	2	5	3	4	6	9	7	8

7. По 20 сельскохозяйственным организациям имеются данные по расходу кормов на корову и надоях молока от коровы. На основании имеющихся данных определить параметры линейного уравнения регрессии между уровнем кормления и продуктивностью коров, рассчитать коэффициенты корреляции и детерминации. Оценить существенность величины коэффициентов корреляции и регрессии при уровне значимости 0,05.

№ п/п	Надой молока на корову, ц	Расход кормов на корову, ц корм. ед.	№ п/п	Надой молока на корову, ц	Расход кормов на корову, ц корм. ед.
1	50,1	60,9	11	75,9	80,0
2	83,8	76,9	12	71,0	76,3
3	63,7	67,0	13	62,2	73,2
4	72,1	62,4	14	69,1	65,2
5	46,5	41,5	15	63,5	51,7
6	54,6	64,8	16	47,9	55,1
7	40,7	45,8	17	68,0	61,4
8	71,7	65,6	18	51,6	60,6
9	58,6	56,2	19	39,9	35,8
10	46,2	43,5	20	55,7	58,2

8. По данным приложения 10 по 25 организациям требуется:

1) построить график зависимости между переменными, по которому необходимо подобрать модель уравнения регрессии;

2) рассчитать параметры уравнения регрессии методом наименьших квадратов;

3) оценить качество уравнения с помощью средней ошибки аппроксимации;

4) найти коэффициент эластичности;

5) оценить тесноту связи между переменными с помощью показателей корреляции и детерминации;

6) оценить значимость коэффициентов корреляции и регрессии по критерию Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

7) охарактеризовать статистическую надежность результатов регрессионного анализа с использованием F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

8) определить прогнозное значение результативного признака, если возможное значение факторного признака составит 1,2 от его среднего уровня по совокупности.

Изучить зависимость и выявить влияние факторов на изменение результативных признаков по следующим парам признаков:

1) численность работников на 1 га сельскохозяйственных угодий (чел.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

2) основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

3) затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

4) основные средства на одного работника (тыс. руб.) и численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

5) оборотные средства на 1 работника (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 работника (тыс. руб.);

6) затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

7) материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

8) заработная плата на 1 работника (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 работника (тыс. руб.);

9) заработная плата на 1 работника (тыс. руб.) и выручка от реализации на 1 работника (тыс. руб.),

10) основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

11) численность работников на 1 га сельскохозяйственных угодий (чел.) и выручка от реализации продукции на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

12) оборотные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

13) материальные затраты на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

14) численность работников (чел.) и валовая продукция на одно хозяйство (млн руб.);

15) площадь сельскохозяйственных угодий (га) и валовая продукция на хозяйство (млн руб.);

16) основные средства (млн руб.) и валовая продукция на одно хозяйство (млн руб.);

17) затраты на производство валовой продукции (млн руб.) и валовая продукция на одно хозяйство (млн руб.);

18) среднегодовая численность работников (чел.) и выручка от реализации продукции на одно хозяйство (млн руб.);

19) площадь сельскохозяйственных угодий (га) и выручка от реализации продукции на хозяйство (млн руб.);

20) оборотные средства (млн руб.) и валовая продукция (млн руб.);

21) основные средства (млн руб.) и выручка от реализации продукции на одно хозяйство (млн руб.).

9. По данным приложения 10 по совокупности организаций исследовать влияние 3–4 факторов на изменение следующих результативных признаков:

1) валовая продукция, млн руб.;

2) выручка от реализации, млн руб.;

3) выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

4) выручка на 1 работника, тыс. руб.;

5) валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.;

6) валовая продукция на 1 работника, тыс. руб.

1. Рассчитать параметры множественного уравнения регрессии методом наименьших квадратов.

2. Оценить качество уравнения с помощью средней ошибки аппроксимации.

3. Оценить тесноту связи между переменными с помощью показателей корреляции, детерминации и статистическую надежность регрессии.

16. Анализ временных рядов

Временной ряд — это ряд значений изучаемого признака за последовательные моменты или периоды времени. Он состоит из уровней ряда (y_i) и периодов или моментов времени, к которым относятся уровни (t_i).

Уровни ряда формируются под влиянием совокупности факторов, проявляющихся через трендовую (T), циклическую или сезонную (S) и случайную компоненты (ε). Применяются аддитивная $Y = T + S + \varepsilon$ или мультипликативная $Y = T \cdot S \cdot \varepsilon$ модели.

Для выявления во временном ряду тенденции или циклических колебаний используется коэффициент автокорреляции. Коэффициент автокорреляции уровней первого порядка, смещенных на одну единицу времени, определяется по формуле

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \bar{y}_1)(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \bar{y}_1)^2 (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}, \text{где } \bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t}{n-1}, \bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}}{n-1}. \quad (16.1)$$

Для характеристики тенденций во временном ряду наиболее часто используются следующие функции:

— линейная

$$\hat{y}_t = a + bt; \tag{16.2}$$

— степенная

$$\hat{y}_t = at^b; \tag{16.3}$$

— гиперболическая

$$\hat{y}_t = a + \frac{b}{t}; \tag{16.4}$$

— показательная

$$\hat{y}_t = ab^t; \tag{16.5}$$

— полиноминальная

$$\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots + b_k t^k. \tag{16.6}$$

Параметры уравнений определяются методом наименьших квадратов.

Для характеристики зависимости между последовательными значениями остатков применяется критерий Дарбина — Уотсона.

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2}, 0 \le d \le 4, \varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t. \tag{16.7}$$

Для выявления циклических колебаний во временных рядах используется гармонический анализ. Наиболее часто применяют ряд Фурье:

$$\hat{y}_t = f(t) + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\left(kt \frac{2\pi}{T}\right) + b_k \sin\left(kt \frac{2\pi}{T}\right)), \tag{16.8}$$

где $k = 1, 2, \dots, \left(\frac{T}{2} - 1\right)$ — номер гармоники;

$t = 1, 2, \dots, \mathrm{T}$ — номер интервала или момента времени;

T — число уровней временного ряда;

$f(t)$ — выровненный уровень в момент или интервал времени t.

Если в исходном временном ряду тенденции развития не обнаружено, то $f(t) = a_0$.

Параметры ряда Фурье определяются методом наименьших квадратов по формулам:

$$a_0 = \frac{\sum y}{T}, a_k = \frac{2}{T} \sum_{t=2}^{T} y_t \cos\left(kt \frac{2\pi}{T}\right), b_k = \frac{2}{T} \sum_{t}^{T} y_t \sin\left(kt \frac{2\pi}{T}\right). \tag{16.9}$$

Пример 1. Имеются квартальные данные о среднемесячных денежных доходах (в среднем на душу населения) Краснодарского края за 2000–2021 гг., руб.

Год	Доход, руб.	Квартал			
		1	2	3	4
2010	16 892	12 842	14 683	18 949	21 196
2011	18 796	15 368	16 550	21 321	22 337
2012	21 686	15 737	17 461	24 463	27 012

Продолжение табл.

Год	Доход, руб.	Квартал			
		1	2	3	4
2013	25 130	18 744	21 539	27 351	33 587
2014	28 094	23 435	26 862	30 379	32 212
2015	31 304	25 980	28 896	31 802	39 233
2016	32 857	28 709	30 802	35 012	37 585
2017	33 403	29 105	31 121	36 569	37 209
2018	34 861	29 728	31 997	38 201	40 077
2019	36 604	29 962	33 669	41 704	41 436
2020	37 352	32 751	30 044	42 884	43 842
2021	41943,6	33664,3	37726,0	48934,1	47500,6

Требуется:

а) построить график временного ряда;

б) рассчитать коэффициент автокорреляции 4-го порядка;

в) дать интерпретацию параметров тренда и сделать вывод по задаче.

Решение:

а) рассмотрим систему координат, где y — среднемесячный доход на душу населения, t — порядковый номер периода;

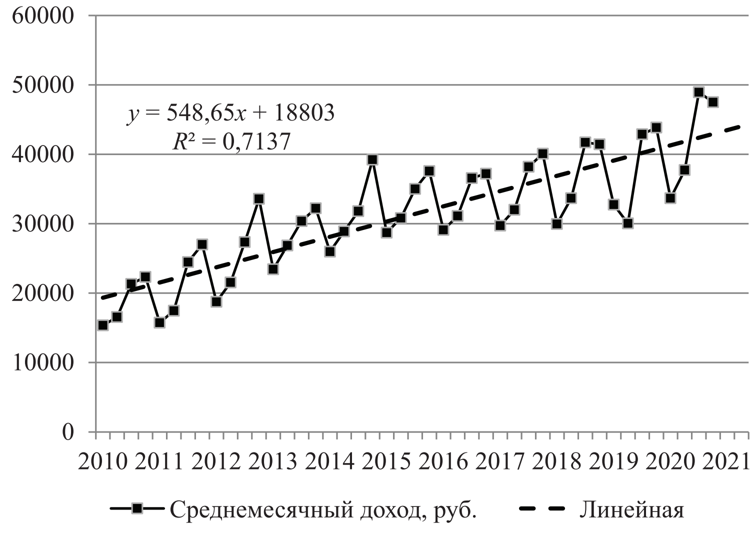


Рис. 16.1 — Динамика среднедушевого дохода населения, руб.

б) определим коэффициент автокорреляции 4-го порядка, для этого заполним вспомогательную таблицу;

Таблица 16.1

Вспомогательная таблица
для расчета коэффициента автокорреляции

t	y_t	y_{t-4}	$y_t-\bar{y}_7$	$y_{t-4}-\bar{y}_8$	$(y_t-\bar{y}_7)(y_{t-4}-\bar{y}_8)$	$(y_t-\bar{y}_7)^2$	$(y_{t-4}-\bar{y}_8)^2$
1	12 842	—	—	—	—	—	—
2	14 683	—	—	—	—	—	—
3	18 949	—	—	—	—	—	—
4	21 196	—	—	—	—	—	—
5	15 368	12 842	–15 779,8	–16 029,5	252 941 502,6	249 000 510,1	256 944 870
6	16 550	14 683	–14 597,8	–14 188,5	207 120 175,9	213 094 305,1	201 313 532
7	21 321	18 949	–9826,75	–9922,5	97 505 926,88	96 565 015,56	98 456 006,3
8	22 337	21 196	–8810,75	–7675,5	67 626 911,63	77 629 315,56	58 913 300,3
9	15 737	15 368	–15 410,8	–13 503,5	208 099 062,6	237 491 215,6	182 344 512
10	17 461	16 550	–13 686,8	–12 321,5	168 641 290,1	187 327 125,6	151 819 362
11	24 463	21 321	–6684,75	–7550,5	50 473 204,88	44 685 882,56	57 010 050,3
12	27 012	22 337	–4135,75	–6534,5	27 025 058,38	17 104 428,06	42 699 690,3
13	18 744	15 737	–12 403,8	–13 134,5	162 917 054,4	153 853 014,1	172 515 090
14	21 539	17 461	–9608,75	–11 410,5	109 640 641,9	92 328 076,56	130 199 510
15	27 351	24 463	–3796,75	–4408,5	16 737 972,38	14 415 310,56	19 434 872,3
16	33 587	27 012	2439,25	–1859,5	–4 535 785,375	5 949 940,563	3 457 740,25
17	23 435	18 744	–7712,75	–10 127,5	78 110 875,63	59 486 512,56	102 566 256
18	26 862	21 539	–4285,75	–7332,5	31 425 261,88	18 367 653,06	53 765 556,3
19	30 379	27 351	–768,75	–1520,5	1 168 884,375	590 976,5625	2 311 920,25
20	32 212	33 587	1064,25	4715,5	5 018 470,875	1 132 628,063	22 235 940,3
21	25 980	23 435	–5167,75	–5436,5	28 094 472,88	26 705 640,06	29 555 532,3
22	28 896	26 862	–2251,75	–2009,5	4 524 891,625	5 070 378,063	4 038 090,25
23	31 802	30 379	654,25	1507,5	986 281,875	428 043,0625	2 272 556,25
24	39 233	32 212	8085,25	3340,5	27 008 777,63	65 371 267,56	11 158 940,3
25	28 709	25 980	–2438,75	–2891,5	7 051 645,625	5 947 501,563	8 360 772,25
26	30 802	28 896	–345,75	24,5	–8470,875	119 543,0625	600,25
27	35 012	31 802	3864,25	2930,5	11 324 184,63	14 932 428,06	8 587 830,25
28	37 585	39 233	6437,25	10 361,5	66 699 565,88	41 438 187,56	107 360 682
29	29 105	28 709	–2042,75	–162,5	331 946,875	4 172 827,563	26 406,25
30	31 121	30 802	–26,75	1930,5	–51 640,875	715,5625	3 726 830,25
31	36 569	35 012	5421,25	6140,5	33 289 185,63	29 389 951,56	37 705 740,3
32	37 209	37 585	6061,25	8713,5	52 814 701,88	36 738 751,56	75 925 082,3
33	29 728	29 105	–1419,75	233,5	–331 511,625	2 015 690,063	54 522,25
34	31 997	31 121	849,25	2249,5	1 910 387,875	721 225,5625	5 060 250,25
35	38201	36 569	7053,25	7697,5	54 292 391,88	49 748 335,56	59 251 506,3
36	40 077	37 209	8929,25	8337,5	74 447 621,88	79 731 505,56	69 513 906,3
37	29 962	29 728	–1185,75	856,5	–1 015 594,875	1 406 003,063	733 592,25

Продолжение табл. 16.1

t	y_t	y_{t-4}	$y_t-\bar{y}_7$	$y_{t-4}-\bar{y}_8$	$(y_t-\bar{y}_7)(y_{t-4}-\bar{y}_8)$	$(y_t-\bar{y}_7)^2$	$(y_{t-4}-\bar{y}_8)^2$
38	33 669	31 997	2521,25	3125,5	7 880 166,875	6 356 701,563	9 768 750,25
39	41 704	38 201	10 556,25	9329,5	98 484 534,38	111 434 414,1	87 039 570,3
40	41 436	40 077	10 288,25	11 205,5	115 284 985,4	105 848 088,1	125 563 230
41	32 751	29 962	1603,25	1090,5	1 748 344,125	2 570 410,563	1 189 190,25
42	30 044	33 669	–1103,75	4797,5	–5 295 240,625	1 218 264,063	23 016 006,3
43	42 884	41 704	11 736,25	12 832,5	150 605 428,1	137 739 564,1	164 673 056
44	43 842	41 436	12 694,25	12 564,5	159 496 904,1	161 143 983,1	157 866 660
45	33 664,3	32 751	2516,55	3879,5	9 762 955,725	6 333 023,903	15 050 520,3
46	37 726	30 044	6578,25	1172,5	7 712 998,125	43 273 373,06	1 374 756,25
47	48 934,1	42 884	17 786,35	14 012,5	249 231 229,4	316 354 246,3	196 350 156
48	47 500,6	43 842	16 352,85	14 970,5	244 810 340,9	267 415 703,1	224 115 870
Итого	1 438 171	1 270 34 6	0	0	2 881 007 993	2 992 647 677	298 532 817

$$\bar{y}_7=\frac{\sum_{t=5}^{n} y_t}{n-4}=\frac{1\,438\,171-12\,842-14\,683-18\,949-21\,196}{48-4}=31147{,}75;$$

$$\bar{y}_8=\frac{\sum_{t=5}^{n} y_{t-4}}{n-4}=\frac{1\,270\,346}{48-4}=28871{,}50;$$

$$r_4=\frac{\sum_{t=5}^{n}(y_t-\bar{y}_7)(y_{t-4}-\bar{y}_8)}{\sqrt{\sum_{t=5}^{n}(y_t-\bar{y}_7)^2\sum_{t=5}^{n}(y_{t-4}-\bar{y}_8)^2}}$$

$$r_4=\frac{2\,881\,007\,993}{\sqrt{2\,992\,647\,677\times 2\,985\,328\,817}}=0{,}964;$$

в) полученное значение коэффициента автокорреляции и графическое изображение временного ряда позволяют сделать вывод о том, что временной ряд среднемесячного дохода населения содержит тенденцию, близкую к линейной, а также сезонную компоненту.

Коэффициенты автокорреляции 1, 2 и 3-го порядков соответственно равны:

$$r_1=\frac{2\,683\,278\,861}{\sqrt{3\,479\,856\,169\times 3\,465\,032\,022}}=0{,}773;$$

$$r_2=\frac{1\,994\,584\,946}{\sqrt{3\,229\,828\,318\times 3\,397\,377\,430}}=0{,}602;$$

$$r_3=\frac{2\,252\,251\,034}{\sqrt{3\,089\,484\,175\times 3\,007\,789\,284}}=0{,}739.$$

1. На основании данных об урожайности одной сельскохозяйственной культуры:

а) построить график динамики урожайности;

б) определить параметры тренда урожайности, использовав приемы линейного и нелинейного сглаживания;

в) найти выровненные значения урожайности и доверительные интервалы для этих значений;

г) определить прогнозные значения урожайности на период до 5 лет.

Год	Пшеница озимая	Кукуруза	Картофель	Сахарная свекла	Подсолнечник	Овощи
1994	31,1	26,4	70	237	18,9	109
1995	32,4	24,9	79	175	18,6	102
1996	33,1	32,2	83	324	20,4	115
1997	31,6	33,5	85	264	19,9	117
1998	37,6	38,0	68	316	13,4	112
1999	28,8	34,8	71	271	22,1	111
2000	33,2	27,8	81	225	22,3	105
2001	39,5	30,2	77	289	20,1	129
2002	37,5	39,4	83	307	15,6	99
2003	43,2	30,9	76	380	18,2	113
2004	36,4	35,3	81	336	23,5	105
2005	44,1	36,3	86	298	20,4	109
2006	39,8	33,3	70	250	17,8	90
2007	42,0	35,4	92	278	16,9	92
2008	36,2	36,4	70	187	16,0	89
2009	32,9	31,3	83	259	17,5	82
2010	49,7	33,8	89	361	20,8	93
2011	44,5	35,1	95	336	18,6	58
2012	39,8	41,9	98	442	21,4	105
2013	50,1	53,0	100	517	25,7	107
2014	54,7	53,2	107	490	24,3	112
2015	57,5	53,5	108	461	24,1	121
2016	58,4	55,0	112	534	25,1	117
2017	62,0	50,4	118	493	25,4	124
2018	61,2	33,5	122	385	21,7	114
2019	59,6	46,4	118	461	23,4	119

2. Имеются следующие данные об объеме подрядных работ строительной организации. Построить график динамики объема подрядных работ. Определить параметры тренда объема подрядных работ, включающего общую закономерность изменения объема работ и периодическую составляющую, используя периодическую функцию ряда Фурье.

Объем подрядных работ, млн руб.

Месяцы	2014 г.	2015 г.	2016 г.	2017 г.
Январь	125	158	146	181
Февраль	188	196	232	220
Март	232	264	289	263
Апрель	441	487	466	466
Май	410	405	434	448
Июнь	421	458	411	464
Июль	503	594	603	668

Продолжение табл.

Месяцы	2014 г.	2015 г.	2016 г.	2017 г.
Август	541	605	574	631
Сентябрь	487	511	534	540
Октябрь	317	407	485	391
Ноябрь	246	386	423	378
Декабрь	328	315	398	408

3. На основании данных приложения 9 об урожайности одной сельскохозяйственной культуры:

а) построить графики динамики урожайности;

б) определить параметры трендов урожайности, использовав приемы: линейного, нелинейного, экспоненциального сглаживания и т. д.;

в) найти выровненные значения урожайности и доверительные интервалы для этих значений;

г) определить прогнозные значения урожайности на период до 3 лет.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ[6]

I. Теория вероятностей

(*Случайные события*)

1. Для проверки результатов геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трех подгрупп. В первой подгруппе n_1 человек, во второй — n_2 и в третьей — n_3. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью p_1, эксперты второй подгруппы — p_2, эксперты третьей подгруппы — p_3. Наудачу вызванный эксперт принимает k независимых решений. Найти вероятность того, что:

а) ровно 3 решения приняты, верно;

б) принимал решения эксперт из первой подгруппы, если 3 решения приняты верно.

2. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что:

а) сумма числа очков не превосходит N;

б) произведение числа очков не превосходит N;

в) произведение числа очков делится на N.

3. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий i-го сорта равно n_i, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Для контроля наудачу берутся m изделий. Определить вероятность того, что среди них m_1 первосортных, m_2, m_3 и m_4 второго, третьего и четвертого сорта соответственно.

$$\left(\sum_{i=1}^{4} m_i = m\right).$$

4. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных.

5. В лифт k-этажного дома сели n пассажиров ($n < k$). Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что:

а) все вышли на разных этажах;

б) по крайней мере двое сошли на одном этаже.

6. В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину $1/k$.

7. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени от T_1 до T_2. Одно из событий длится 10 мин, другое — t мин. Определить вероятность того, что:

а) события «перекрываются» по времени;

б) «не перекрываются».

8. В круге радиуса R наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны S_1 и S_2.

[6] Исходные данные находятся в приложении 8.

9. В двух партиях процент доброкачественных изделий k_1 и k_2 соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них:

а) хотя бы одно бракованное;

б) два бракованных;

в) одно доброкачественное и одно бракованное?

10. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком равна p_1, вторым — p_2. Первый сделал n_1, второй — n_2 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

11. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает герб. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т. д.

1. Найти вероятность указанного ниже события.

Варианты 1–8. Выиграл A до k-го броска.

Варианты 9–15. Выиграл A не позднее k-го броска.

Варианты 16–23. Выиграл B до k-го броска.

Варианты 24–31. Выиграл B не позднее k-го броска.

2. Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

12. Урна содержит M занумерованных шаров с номерами от 1 до M. Шары, извлекаются по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: A — номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1, 2, ..., M; B — хотя бы один раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения; C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий A, B, C. Найти предельные значения вероятностей при $M \to \infty$.

13. Из 1000 ламп n_i принадлежат i-й партии:

$$(i = 1, 2, 3) \cdot \sum_{i=1}^{3} n_i = 1000.$$

В первой партии 6%, во второй — 5%, в третьей — 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа бракованная.

14. В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй — N_2 белых и M_2 черных. Из первой во вторую переложено K шаров, затем из второй урны извлечен один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар белый.

15. В альбоме k чистых и l гашеных марок. Из них наудачу извлекаются m марок (среди которых могут быть и чистые, и гашеные), подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекается n марок. Определить вероятность того, что все n марок чистые.

16. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем i-й завод поставляет $m_i\%$ изделий $(i = 1, 2, 3)$. Среди изделий i-го завода $n_i\%$

первосортных. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено i-м заводом.

17. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадает n раз. Определить вероятность того, что цифра выпадает m раз.

18. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна p. Куплено n билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

19. На каждый лотерейный билет с вероятностью p_1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью p_2 — мелкий выигрыш и с вероятностью p_3 билет может оказаться без выигрыша. Куплено n билетов. Определить вероятность получения n_1 крупных выигрышей и n_2 мелких.

20. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна p. Поступило n вызовов. Определить вероятность m «сбоев».

21. Вероятность наступления некоторого события в каждом из n независимых испытаний равна p. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет следующему неравенству.

Варианты 1–11: $k_1 \leq m \leq k_2$.

Варианты 12–21: $k_1 \leq m$.

Варианты 22–31: $m \leq k_2$.

(Случайные величины)

22. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X. Найти параметр c, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$.

Варианты 1–8:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c-a}, x \in [a,b], \\ 0, x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Варианты 9–16:

$$f(x) = \begin{cases} a, x \in [c,b], \\ 0, x \notin [c,b]. \end{cases}$$

Варианты 17–24:

$$f(x) = \begin{cases} c, x \in [a,b], \\ 0, x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Варианты 25–31:

$$f(x) = \begin{cases} a, x \in [\dfrac{b-c}{2}, \dfrac{b+c}{2}], \\ 0, x \notin [\dfrac{b-c}{2}, \dfrac{b+c}{2}]. \end{cases}$$

23. По данному закону распределения случайной величины найти характеристическую функцию $g(t)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ случайной величины X.

Варианты 1–10. Биномиальный закон:

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ 0<p<1,\ k=0,1,\ldots,n.$$

Варианты 11–20. Закон Паскаля (отрицательное биноминальное распределение):

$$P(X=k)=\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}},\ a>0,\ k=0,1,2,\ldots$$

Варианты 21–31. Закон Пуассона:

$$P(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a},\ a>0,\ k=0,1,2,\ldots$$

Замечание.

1. $g(t)=M[e^{itX}]$ — характеристическая функция случайной величины X (i — мнимая единица, $i^2=-1$).

Для ДСВ X:

$$g(t)=\sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} p_k ,$$

где $p_k=P(X=x_k)$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

2. Характеристическая функция $g(t)$ — один из способов задания СВ наряду с дифференциальной и интегральной функциями, которыми удобнее пользоваться, чем законами распределения. Метод характеристических функций часто используется для нахождения композиции законов распределения.

3. Метод характеристических функций был создан и использован Н. М. Ляпуновым в 1900 г. для доказательства одной из наиболее общих форм центральной предельной теоремы.

4. Основные свойства характеристических функций:

а) если СВ X и Y связаны соотношениями $Y=aX$, то $g_y(t)=g_x(at)$.

б) характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых. То есть если даны независимые СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с характеристическими функциями $g_{x_1}(t), g_{x_2}(t),\ldots,g_{x_n}(t)$, то для СВ $Y=\sum_{\kappa=1}^{n} X_i$: $g_y(t)=\prod_{\kappa=1}^{n} g_{x_\kappa}(t)$.

5. Если $it=u$ (u — параметр, вообще говоря, комплексный), то $g_x(u)=$ $=M(e^{ux})$ — производящая функция. Наиболее важное свойство $g_x(u)$ состоит в том, что она содержит в себе все сведения о начальных моментах:

$$g_{\dot{x}}=M(X)=\alpha_1;$$

$$g_{\ddot{x}}(0)=M(X^2)=\alpha_2;$$

$$g_x^{(k)}(0)=M(X^\kappa)=\alpha_\kappa.$$

24. Дана плотность распределения $p(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $p(y)$, математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y, которая представляет собой площадь одной из указанных ниже геометрических фигур.

Варианты 1–15:

$$p(x)=\begin{cases}1/(b-a), x\in[a,b],\\ 0, x\notin[a,b];\end{cases}$$

в вариантах 1–5 Y — площадь равностороннего треугольника со стороной X, в вариантах 6–10 Y — площадь круга радиуса X, в вариантах 11–15 Y — площадь квадрата со стороной X.

Варианты 1–31:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)^2}, x\in[a,b],\\ 0, x\notin[a,b].\end{cases}$$

В вариантах 16–20 Y — площадь равностороннего треугольника со стороной X, в вариантах 21–25 Y — площадь круга радиуса X, в вариантах 26–31 Y — площадь квадрата со стороной X.

25. Случайная величина X имеет плотность распределения $p(x)$, указанную в задаче 93. Другая случайная величина Y связана с X функциональной зависимостью: $Y = 2X^m + 1$. Определить математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ случайной величины Y.

26. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей $p(x)$. Найти плотность распределения вероятностей $p(y)$ случайной величины $Y = \varphi(X)$.

27. По заданной плотности распределения $f(x_1,x_2)$ двумерной случайной величины (X_1,X_2) найти плотность распределения $f(y_1,y_2)$ двумерной случайной величины (Y_1,Y_2), связанной взаимно однозначно с (X_1,X_2) указанными ниже соотношениями.

Варианты 1–15:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi ab}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}\right)};$$

$$X_1=aY_1\cos nY_2\,, X_2=bY_1\sin nY_2\,, 0\ \le\ Y_1<\infty, 0\le Y_2<\frac{2\pi}{n}.$$

Варианты 16–31:

$$f(x_1,x_2)=\frac{ab}{\pi^2(x_1^2+a^2)(x_2^2+b^2)};$$

$$X_1=atg\, nY_1, X_2=btg\, nY_2, |Y_1|<\frac{\pi}{2n}, |Y_2|<\frac{\pi}{2n}.$$

28. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольной области ABC, т. е.

$$f(x,y)=\begin{cases}1/S, \text{если } (x,y)\in\Delta\,ABC,\\ 0, \text{если } (x,y)\notin\Delta\,ABC,\end{cases}$$

где S — площадь треугольника ABC. Определить: условные плотности распределения $f(x/y)$ и $f(y/x)$; математические ожидания $M(X)$, $M(Y)$; дисперсии $D(X)$, $D(Y)$; коэффициент корреляции r. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? (В исходных данных указаны декартовы координаты вершин треугольника ABC.)

29. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания $M(X)$ менее чем на $N\sigma$, где $\sigma = \sqrt{D(X)}$ — среднее квадратическое отклонение случайной величины X; N — номер варианта.

30. Случайная величина X_i с одинаковой вероятностью может принимать одно из двух значений: i^{α} или $-i^{\alpha}$. Выяснить, удовлетворяет ли последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ попарно независимых случайных величин закону больших чисел:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X)_i\right| < \varepsilon\right) = 1,\ \varepsilon > 0.$$

Решить задачу для двух значений параметра α: α_1 и α_2.

31. На отрезке $[0, \alpha]$ случайным образом выбраны n чисел, точнее, рассматриваются n независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, равномерно распределенных на отрезке $[0, \alpha]$. Найти вероятность того, что их сумма заключена между x_1 и x_2, т. е. $P\left(x_1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < x_2\right)$.

II. Математическая статистика

В задачах 1–20 по данным приложения 10 составить вариационный ряд распределения сельскохозяйственных угодий по одному признаку. Построенный интервальный ряд изобразить графически с помощью полигона, гистограммы и кумуляты. Определить среднее значение признака, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Замечание. Считать, что пашня составляет 60% от площади сельскохозяйственных угодий.

Валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

Валовая продукция на 1 га пашни, тыс. руб.

Валовая продукция на среднегодового работника, тыс. руб.

Валовая продукция на 100 руб. основных средств, руб.

Валовая продукция на 100 руб. затрат, руб.

Выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

Выручка на 1 га пашни, тыс. руб.

Выручка на 100 руб. затрат, руб.

Выручка на среднегодового работника, тыс. руб.

Основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

Основные средства на 1 га пашни, тыс. руб.

Основные средства на среднегодового работника, тыс. руб.

Численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий, чел.

Численность работников на 100 га пашни, чел.

Годовая заработная плата на среднегодового работника, тыс. руб.

Затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий, тыс. руб.

Затраты на реализованную продукцию на 1 га пашни, тыс. руб.

Площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника, га.

Площадь пашни на среднегодового работника, га/

Затраты на 100 руб. выручки, руб.

Задачи 21–40. Рассматривая данные приложения 10 как результаты случайной бесповторной 20%-ной выборки и используя результаты решения задач 1–20, определить:

а) доверительный интервал для среднего значения признака в генеральной совокупности с доверительной вероятностью 0,95;

б) необходимый объем выборки, обеспечивающий уменьшение предельной ошибки выборки в 2 раза, сохранив остальные характеристики на прежнем уровне. Условие задачи 21 соответствует данным задачи 1, задачи 22 — данным задачи 2 и т. д.

Задачи 41–60. Дать количественную оценку связи между двумя признаками. Построить график корреляционной зависимости между признаками. По графику определить тип уравнения связи. Методом наименьших квадратов найти параметры уравнения регрессии. Полученное уравнение нанести на график связи. Рассчитать коэффициенты корреляции и детерминации. Оценить значимость выборочного коэффициента корреляции при уровне значимости 0,05. Для выполнения задач использовать данные приложения 10 по первым 20 предприятиям по указанным в соответствующем варианте двум признакам.

Выявить влияние на изменение результативных признаков одного из указанных факторов:

— валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

— валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий (чел.);

— валовая продукция на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га);

— валовая продукция на 1 га пашни (тыс. руб.) и основные средства на 1 га пашни (тыс. руб.);

— валовая продукция на 1 га пашни (тыс. руб.) и численность работников на 100 га пашни (чел.);

— валовая продукция на 1 га пашни (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га);

— валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и основные средства на среднегодового работника (тыс. руб.);

— валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и годовая заработная плата на среднегодового работника (тыс. руб.);

— валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га);

— выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и основные средства на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

— выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и численность работников на 100 га сельскохозяйственных угодий (чел.);

— выручка на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.) и затраты на реализованную продукцию на 1 га сельскохозяйственных угодий (тыс. руб.);

— выручка на 1 га пашни (тыс. руб.) и основные средства на 1 га пашни (тыс. руб.);

— выручка на 1 га пашни (тыс. руб.) и численность работников на 100 га пашни (чел.);

— выручка на 1 га пашни (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га);

— выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и основные средства на среднегодового работника (тыс. руб.);

— выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и годовая заработная плата на среднегодового работника (тыс. руб.);

— выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь сельскохозяйственных угодий на среднегодового работника (га);

— выручка на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га);

— валовая продукция на среднегодового работника (тыс. руб.) и площадь пашни на среднегодового работника (га).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агапов*, *Г. И.* Сборник по теории вероятностей : учебное пособие для вузов. — 2-е изд., доп. — М. : Высш. шк., 1994. — 112 с.

2. *Андрухаев*, *Х. М.* Сборник задач по теории вероятностей : учебное пособие для студентов пед. ин-тов по спец. 2104 «Математика», «Математика с доп. спец. физика» и 2105 «Физика с доп. спец. математика» / под ред. А. С. Солодовникова. — М. : Просвещение, 1985. — 160 с.

3. *Бондаренко, П. С.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / П. С. Бондаренко, Г. В. Горелова, И. А. Кацко. — М. : КНОРУС, 2019. — 390 с.

4. *Вентцель*, *Е. С.* Задачи и упражнения по теории вероятностей : учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — 3-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2000. — 366 с. : ил.

5. *Гмурман*, *В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикл. бакалавриата / В. Е. Гмурман — 12-е изд. — М. : Юрайт, 2016. — 479 с.

6. *Гмурман*, *В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 11-е изд. — М. : Юрайт, 2016. — 404 с.

7. *Головань, С. В.* Сборник задач по курсу теории ваероятностей : учебное пособие / С. В. Головань, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. — М. : Издат. дом «Дело» РАНХиГС, 2021. — 232 с.

8. *Горелова*, *Г. В*. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. — 4-е изд. — Ростов н/Д : Феникс, 2006. — 475 с.

9. *Карасев*, *В. А*. Теория вероятностей и математическая статистика. Математическая статистика [Электронный ресурс] : практикум / В. А. Карасев, Г. Д. Лёвшина. — Электрон. текстовые данные. — М. : Издат. дом МИСиС, 2016. — 120 с.

10. *Кацко*, *И. А*. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / И. А. Кацко, П. С. Бондаренко, Г. В. Горелова, — 2-е изд., М. : КНОРУС, 2020. — 800 с.

11. *Колемаев*, *В. А*. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник для вузов / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. — 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. — 352 с. — 5-238-00560-1.

12. *Коршунов*, *Д. А*. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей : учебное пособие для вузов / Д. А. Коршунов, С. Г. Фосс, И. М. Эйсымонт. — 3-е изд., испр. и доп. — СПб. : Лань, 2022. — 220 с.

13. *Коршунов*, *Д. А*. Сборник задач и упражнений по математической статистике : учебное пособие / Д. А. Коршунов, Н. И. Чернова — 2-е изд., испр. — Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2004. — 128 с.

14. *Ниворожкина*, *Л. И.* Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями : учебное пособие для бакалавров /

Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова, И. Э. Гурьянова ; под ред. проф. Л. И. Ниворожкиной. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2015. — 480 с.

15. *Прохоров*, *Ю. В*. Лекции по теории вероятностей и математической статистике : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Ю. В. Прохоров, Л. С. Пономаренко. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Юрайт, 2019. — 219 с.

16. Сборник задач по математике для втузов : в 4 частях. Ч. 4 : учебное пособие для втузов / под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во Физ.-мат. лит., 2003. — 432 с.

17. *Чудесенко*, *В. Ф*. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). — М. : Высш. шк., 1983. — 242 с.

ОТВЕТЫ

Эту задачу Штирлиц решал
уже в седьмой раз. Он ненавидел
эту задачу. Ответ опять не совпадал.
(«*По Ю. Семёнову. 17 мгновений весны*»)

Часть I

1.

1.1

1.	а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) нет	2.	а) да; б) нет; в) нет; г) да
3.	а) нет; б) да; в) нет	4.	$\bar{B}$

1.2

1. а) 1/6; б) 11/36; в) 1/18; г) 1/3; д) 7/18; е) 15/36

2.	$(a-1)/(a+b-1)$	3.	а) 0,78; б) 78%
4.	6	7.	Пт13 — 688 раз за период 400 лет
8.	2/3	9.	0,4135
10.	13/25	11.	0,708 r
12.	1/3	13.	$(2l)/(\pi L)$
14.	*а*) 1/4; б) 1/2; в) 1/3	15.	а) 1/4; б) 0
16.	$2ln2-1$	17.	а) 1/4; б) 3/4; в), г), д) 0
18.	а) 1; б); в) 0	19.	а) 31/72; б) 59/72
20.	107/288	21.	$(2T(\Delta+t)-(\Delta^2-t^2))/(2T^2)$
22.	0,5	23.	$d(2a-d)/(a^2)$
24.	а) 2/3; б) 1/3; в), г) 1/8; д) 3/4; е)1/4	25.	а) $\pi a^2/4, 0<a<1$; б) 1/4; г) $(1+a)^2/4$
26.	1/5	27.	а) $(a-D)^2/a^2$, б) $1-D^2/a^2$
28.	а) 1/3; б) $(3+2ln2)/9$		

1.3

1.	30	2.	6
3.	15	4.	362 880
5.	450450	6.	а) 5040; б) 10 000
7.	720	9.	*а*) 0,25; б) 0,375; в) 0,75
10.	1/40320	11.	1/120
12.	0,25	13.	а) 4/9; б) 0,00033
14.	1/120	15.	0,25
16.	0,26	17.	0,5
18.	0,079	19.	0,38
20.	а) 0,087; б) 0,0043	21.	0,348
22.	а) 1/376992; б) 0,0123	23.	0,00077
24.	0,3	25.	а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9
26.	0,0135	27.	0,07
28.	а) 0,15357; б) 0,99997672	29.	1/216

30.	0,5	31.	а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008; г) 0,512
32.	0,3065	33.	28/29
34.	а) 3/26; б) 0,4265; в) 0,0099; г), д) 1/52; е) 0,0019; ж) 0,604; з) 0,905	35.	24/95
36.	$1-(35/36)^n$	37.	$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$; $\sum_{k=0}^{m}\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$
38.	$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$; $1-\frac{1}{e}$	39.	а) 1/216; б) $166/6^5$
40.	а) $2^n n!/(2n)!$; б) $2^n(n!)^2/(2n)!$		
41.	а) 0,0000345; б) 0,00773	42.	$\sum\limits_{k=0}^{6}(-1)^k C_6^k\left(1-\frac{k}{36}\right)^r$
43.	1/5	44.	а) m^n; б) A_m^n; в) C_{n+m-1}^n; г) C_m^n
45.	$1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}$	46.	$1-\frac{12\cdot 11\cdot\ldots\cdot(12-n+1)}{12^n}$; $n=5$
47.	в задаче 45: при $n=22, p=0{,}4757$; при $n=23, p=0{,}5023$		
48.	а) $\frac{q(1-p)}{p+q-pq}$; б) $\frac{qp}{p+q-pq}$	49.	Первое событие более вероятно
50.	0,266	51.	0,0984
52.	0,2963	53.	0,5088
54.	11	55.	0,6947
56.	1/18; 2/801; 1/11748; 1/511038; 1/43949268	57.	0,000043; 0,000257; 0,000900
58.	$6{,}3\cdot 10^{-12}$		

1.4

6.	$P(A/B)=P(C/B)P(A/BC)+P(\bar{C}/B)P(A/B\bar{C})$		
7.	2/15	8.	*а*) 0,5; б) 0,15
9.	4/13	10.	0,5
11.	*а*) 91/460; б) 7/46; в) 6/115	12.	0,027
13.	*а*) 0,902; б) 0,098	14.	0,6
15.	0,763	16.	а) 0,037; б) 0,049
17.	а) 1/3; б) 8/15; в) 3/5; г) 7/15	18.	0,271
19.	а) 0,648; б) 0,72	20.	а) 1/360; б) 1/180; в) 1/180
21.	а) 0,189; б) 0,027; в) 0,343; г) 0,216; д) 0,657		
22.	а) 0,0105; б) 0,4265; в) 0,558	23.	1/7
24.	36/71 и 35/71	25.	31/35
26.	Найдет	27.	0,059
28.	а) 0,379; б) 0,621	29.	а) 0,558; б) 0,385; в) 0,615
30.	37/64	31.	а) 0,392; б) 0,428; в) 0,904; г) 0,096
32.	а) 0,51; б) 0,94; в) 0,34	33.	$3/4$
34.	а) 0,741; б) 0,241; в) 0,88(8)	35.	0,006; 0,092; 0,398; 0,504
36.	0,288	37.	0,4053
38.	4	39.	а) 0,479; б) 0,333; в) 0,124
40.	а) 0,049; б) 0,267	41.	51%

42.	0,405	43.	а) $1/N!$; $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}/n!$; $1-\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; б) 0; $1-1/e$; $1/e$
44.	11/36	45.	$(48+3n)/51n$
46.	7:1	49.	а) нет, б) да
50.	а) нет; б) да		

1.5

2.	*а*) 0,5075; б) 0,8276	3.	1/6
4.	0,676	5.	0,643
6.	0,27	7.	0,1688
8.	*а*) 0,56; б) 0,857	9.	0,25
10.	0,02	11.	а) 0,79; б) 0,772
12.	0,4	13.	а) 0,725; б) 0,276
14.	0,3; 0,556	15.	0,0715
16.	0,2857	17.	В
19.	Выбрать закрытую дверь	20.	а) 119; б) 71
22.	0,52	23.	28/29
24.	9/16	25.	$(\lambda p)^k e^{-\lambda p}/k!$
26.	$2p(1-p)^k/(1+p)^{k+1}$	27.	$(\lambda t)^{k-1}e^{-\lambda t}/(k-1)!$
28.	а) 3/4; б) 1/2	29.	а) 0,393; б) 0,201
30.	От первого	31.	0,103; 0,276; 0,621
32.	а) 2/9; б) 4/9; в) 1/3	33.	$1/\sqrt{\pi n}$
34.	0,8	35.	9

2.

2.1

1.	а) 0,31; б) 0,5; в) 0,5; г) 0,625	2.	124 или 125
3.	От 299 до 305	4.	а) Одну из двух; б) не менее двух из четыре
5.	0,999	6.	0,737
7.	$(1/4^n)C_{2n}^n$	8.	а) 0,1488 б) 0,1869 в) 0,4
9.	0,0806	10.	1; 0,3697
11.	$1{,}246\cdot 10^{-13}$	12.	Первое
13.	21	14.	а) 3 из 4; б) не менее 5 из 8; в) не более n из $2n$; г) равновероятно
15.	а) $C_{2N-r}^N/2^{2N-r}$; б) $C_{M+N-r}^N p^{M-r}(1-p)^{N+1}+C_{M+N-r}^N p^{M+1}(1-p)^{N-r}$		
16.	а) $C_{n-1}^{m-1}/2^n$;; б) $C_{n-1}^{m-1}p^m(1-p)^{n-m}$		
17.	В	18	$12!/2^6\cdot(1/6)^{12}$
19.	а) 2; б) $1-730!/2^{365}365^{730}$	20	$n!/(k_1!\dots k_r!)\cdot(1/r)^n$
21.	$(C_{2n}^n)^2/C_{4n}^{2n}\approx\sqrt{2/(\pi n)}$		

2.2

1.	а) 0,061; б) 0,92; в) 0,264	2.	0,09
3.	0,387; 0,42; 0,368	4.	0,212
5.	15; 0,115	6.	2;0,271
7.	0,993	8.	0,9596

9.	а) 0,9938; б) 0,9937	10.	0,0007
11.	444	12.	56; 0,119
13.	а) 0,992; б) 0,988	14.	От 19 до 21
15.	69	16.	0,99904
17.	0,999	18.	от 792 до 828
19.	От 792 до 828	20.	8100
21.	От 382 до 394	22.	3162
23.	0,002	24.	0,0005
25.	5	26.	29
27.	$0{,}06 < p < 0{,}08$	28.	0,971
29.	$n \geq 38416$	30.	$n \geq 70$
31.	0,93	32.	а) 0,64; б) 0,093

3

3.	$M(X) = 3{,}6;\ D(\mathrm{X}) = 0{,}36;$ $\sigma(X) = 0{,}6$	4.	$M(X) = 2{,}06;\ D(X) = 0{,}999;$ $\sigma(X) = 1{,}0$
5.	$M(X) = 1{,}2;\ D(\mathrm{X}) = 0{,}72;$ $\sigma(X) = 0{,}85$	7.	$M(X) = 1{,}8$
8.	$M(X) = 1{,}2;\ D(\mathrm{X}) = 0{,}72;$ $\sigma(X) = 0{,}85$	10.	$x_0 = 2$
11.	3	13.	$M(X) = 2{,}4264$
14.	$M(X) = 39{,}221$	15.	$M(X) = 1{,}87$
17.	а) $M(Z) = 34;\ D(Z) = 96;$ б) $M(Z) = 15;\ D(Z) = 161;$ в) $M(Z) = 13;\ D(Z) = 49$	18.	а) 0,6768; б)0,8647
19	а) $M(Z) = 7{,}4;\ D(Z) = 2{,}2;$ $\sigma(Z) = 1{,}48;$ б) $M(V) = 13{,}68;$ $D(V) = 29{,}3376;$ $\sigma(X) = 5{,}4164$	20.	–1/9
22.	34,1; 150,19; 12,26	23.	$x_2 = 2{,}6$; $p_2 = 0{,}5$
24.	$p(x = 2) = 0{,}1; p(x = 3) = 0{,}2$	25.	$M(X) = 2$; $\sigma(\mathrm{x}) = 1{,}4$
26.	$\mathrm{p} = 0{,}1$	27.	$M(X) = 7$
28.	$x_1 = 4;\ \mathrm{p}_1 = 0{,}4;\ x_2 = 5;\ \mathrm{p}_2 = 0{,}6$	29.	$x_1 = 0;\ x_2 = 1; \mathrm{p}_2 = 0{,}15$
30.	а) 0,857375; 0,1355375; 0,007125; 0,000125; в) 0,00725	30.	а) 0,857375; 0,1355375; 0,007125; 0,000125; в) 0,00725
33.	$M(X) = 42;\ D(\mathrm{X}) = 35;$ $\sigma(X) = 5{,}92$	34.	$M(X) = 2{,}4$
35.	$M(X) = 4{,}2;\ D(\mathrm{X}) = 0{,}64;$ $\sigma(X) = 0{,}8$	36.	а) $M(X) = 3{,}1216;$ б)$M(X) = 4{,}091$

4

3	$M(X) = 2{,}1$	4.	а) 0,5; б) 0,75; в) 0,25; г) 0,5
5.	0,29663	6.	б) $M(X)=2\frac{1}{6}$; $D(X)=\frac{11}{36}$; $\sigma(X)=\frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0{,}553$; в) $\frac{3}{8}$

7.	а) 0,5a; б) $M(X) = 2 - 2a$; $D(X) = \frac{4}{3}$; $\sigma(X) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	8.	$A = 0$; $B = 2$; $M(X) = 1,5$; $D(X) = 0,15$; $\sigma(X) =$ $= 0,387$
9.	б) 0,847	10.	б) 0,599; в) $M(X) = 2,566$; $D(X) = 0,079$; $\sigma(X) = 0,28$
11.	б) 7/36	12.	б) 0,1875
13.	б) 3/16; в) $M(X) = 0,8\sqrt{a}$; $D(X) =$ $= \frac{2}{75}a$; $\sigma(X) = \frac{\sqrt{6}}{15}a$	14.	а) $a = 0,25$; б) $M(X) = 2\frac{1}{3}$; в) 0,25
15.	$M(X) = 0$; $D(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2$	16.	а) $c = 48$; б) $M(X) = 199/64$; $D(X) = 0,463$
17.	$c = 1/\pi$		

5

5.1

2.	а) $M(X) = 8;\ D(X) = 3;$ б) $M(X) = 1;$ $D(X) = 5\frac{1}{3}$	3.	$M(X) = a$; $D(X) = 5\frac{1}{3}$; $\sigma(X) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
4.	в) $\frac{5}{16}$; г) $M(X) = \frac{a}{3}$; $D(X) = \frac{a^2}{18}$; $\sigma(X) = \frac{a\sqrt{2}}{6}$	5.	в) 0,75; г) $M(X) = 0$; $D(X) = \frac{a^2}{6}$; $\sigma(X) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$
6.	а) 0,8413; б) 0,9544	7.	а) 0,7258; б) 0,9995; в) 0,9082; г) 0,8164
8.	а) 0,8413; б) 0,5328	9.	0,9997
10.	(56,1; 63,9)	11.	10,0
12.	(240; 360)	13.	а) 0,5328; б) $M_0 = 5;\ Me = 5$
14.	(–2; 2)	15.	0,8185
17.	а) 0,865; б) 0,01	19.	а) 0,5465; б) 0,4036; в) 0,9502; г) 0,0498
21.	а) 0,134; б) 0,9826; в) 0,9975	22.	а) 0,134; б) 0,9379
23.	13158,6	24.	5,83 и 2,41
25.	13158,6	26.	0,42845
28.	0,744	29.	0,1

5.2

1.	а) $\frac{1}{\pi} arctg\ x + \frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$. $D(X) = a^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$; $\sigma(X) = a \cdot \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}$	2.	б) 0,4712; в) $M(X) = a \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$;
3.	а) $x_0 = 1,25^{\frac{1}{\beta}}a$; в) $M(X) = \frac{\beta a}{\beta - 1}$ при $\beta > 1$		

6

2\. $M(X) = 7{,}5$; $D(X) = 56{,}25$; $M(Y) = 5{,}5$; $D(Y)=24{,}75$

3\. $f(x,y) = \begin{cases} \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y} & при\; x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0 & при\; x < 0,\ y < 0. \end{cases}$

4\. 0,2926

5\. $\dfrac{3}{128}$

7\. $f(x) = 8e^{-4x-2y}$, при $x \ge 0, y \ge 0$; $f(x) = 0$, при $x < 0, y < 0$

9\. а) $a = 0{,}5$; б) $M(X) = M(Y) = \dfrac{\pi}{4}$; в) $D(X) = D(Y) = (\pi^2 + 8\pi - 32)/16$

11\. $D(X) = D(Y) = (\pi^2+8\pi-32)/16$

12\. а) $f(x,y) = \dfrac{1}{18}$ внутри треугольника, $f(x,y) = 0$ вне треугольника;

б) $f_1(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{18}x,\ 0 < x < 6;$

$f_2(y) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{18}y,\ 0 < y < 6;$

$f(x/y) = \dfrac{1}{6-y},\ 0 < y < 6;$

$f(y/x) = \dfrac{1}{6-x},\ 0 < x < 6$

13\. а) $f(x,y) = \dfrac{1}{a^2}$ внутри квадрата; $f(x,y) = 0$ вне квадрата;

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\sqrt{2} - 2|x|}{a^2} & при\ |x| \le \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & при\ |x| > \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

$f(y) = \begin{cases} \dfrac{a\sqrt{2} - 2|y|}{a^2} & при\ |y| \le \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & при\ |y| > \dfrac{a\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

13\. $f(x/y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{2} - 2|y|} & при\ |x \pm y| \le \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & при\ |x \pm y| > \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

$f(y/x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{2} - 2|x|} & при\ |x \pm y| \le \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & при\ |x \pm y| > \dfrac{a\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

14\. $M(X) = M(Y) = \dfrac{\sqrt{3\pi}}{6}$; $D(X) = D(Y) = \dfrac{4-\pi}{12}$

15\. $M(X) = M(Y) = \dfrac{a}{3}$; $D(X) = D(Y) = \dfrac{a^2}{18}$; $K(X,Y) = -\dfrac{a^2}{36}.$

16\. а) $f(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0,\ y \le 0, \\ 10e^{-(2x+5y)} & при\ \ x > 0,\ y > 0; \end{cases}$

б) $F(x,y) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0,\ y \le 0, \\ (1 - e^{-2x}) \cdot (1 - e^{-5y}) & при\ \ x > 0,\ y > 0. \end{cases}$

18\. а) $p/(2-p)$; б) $1/(3-3p+p2)$; в) $1/(2-p)^2$

19\. –1/5

22\. 1/8

23\. $F(z) = 1/2 - ln2z$

24\. а) $F(x) = 3/2\,(1 - x^2)$; $F(y) = 3/2\,(1 - y^2)$; б) $Cov(X,Y) = -\frac{13}{320}$; $\rho = -0{,}684$

25\. в) $Cov(X,Y) = -\frac{1}{64}$

26\. $(a+b)/2$; $(b-a)^2/(2(n+1)(n+2))$

27\. 37/40

28\. 11 : 6

30. $M(X_1 / X_1 + X_2) = (X_1 + X_2)\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

31. $M(X / X + Y) = (X+Y)/2$

32. 0,076

33. $M(Y) = \alpha\lambda;\ D(Y) = \beta^2\lambda^2 + (\alpha^2+\beta^2)\lambda$

34. $M(W) = 21/8$

35. 25 тыс. руб.

38. а) 0,309; б) 0,99; в) 0,067

39. а) 0,703; б) 0,438; в) 32,7

40. $1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}3935$

41. 0,393

42. а) $x \geq 42{,}5$; б) $w = 0{,}90$

7

1. а) 1,6; б) 6,3; в) 1,7; г) 0,9.

2. а) 0; б) –2,7; в) 1,5; г) 1,061

3. *а)* $M(Y) = 10$; $D(Y) = 36$; $\sigma(y = 6)$;
б) $M(Y) = 14{,}5$; $D(Y) = 95{,}85$;
$\sigma(Y) = 9{,}8$

4. б) $M(Y) = 0{,}475$; $D(Y) = 0{,}018$;
$\sigma(X) = 0{,}135$

5. *а)* $g(y) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ при $y \in (-1;1)$;
б) $g(y) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ при $y \in (0;1)$.

6. *а)* $g(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-10)^2}{8}}$;
б) $g(y) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt[3]{y^2}} e^{\frac{-(\sqrt[3]{y}-2)^2}{2}}$

7. $g(S) = -\ln S$, где $0 < S < 1$

8. *а)* $g(y) = \dfrac{3}{\pi(9+y^2)}$;
б) $g(y) = \dfrac{1}{3\pi(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}})}$.

9. $$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ \dfrac{z}{20} & \text{при } 0 < z \leq 2, \\ \dfrac{1}{10} & \text{при } 2 < z \leq 10, \\ \dfrac{12-z}{20} & \text{при } 10 < z \leq 12, \\ 0 & \text{при } z > 12. \end{cases}$$

10. $$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq -3, \\ \dfrac{z+3}{25} & \text{при } -3 < z \leq 2, \\ \dfrac{7-z}{25} & \text{при } 2 < z \leq 7, \\ 0 & \text{при } z > 7. \end{cases}$$

11. $$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 0, \\ e^{-\frac{z}{2}}(1 - e^{-\frac{z}{2}}) & \text{при } z > 0. \end{cases}$$

12. $M(Z) = 0$, $D(Z) = 2$,
$g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4}}$.

13. $g(x) = \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}$,
при $x > 0$.

16. а) $\frac{2}{\pi} arcsin\frac{x}{2}$ при $0 < x \leq 2$;
б) $\frac{x^2}{2}$ при $0 < x \leq 2$

17. $f(x) = \frac{x}{2R\sqrt{4R^2 - x^2}}$ при x $0 \leq x \leq 2R$

18. $f(x) = \left(\frac{1}{b-a}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$, при $\pi a^2/4 \leq x \leq \pi b^2/4$

23. $M(X) = \frac{2}{3}R$; $D(X) = \frac{1}{18}R^2$

21. E_1

30. $M(X) = 2/3R, D(X) = 1/18R^2$

24. б) $M(X) = 0, D(X) = 1/2$

25. 0,999

26. $M(T) = 87, D(T) = 7611$

27. б) $M(Y) = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

29. а) $M(X) = 15{,}1$; $\sigma(X) = 6{,}073$; б) 0,462

30. Да

31. $M(X) = 67{,}66$.

32. 0,945

33. а) $M(X) = 149, \sigma(X) = 14$; б) $W = 0{,}408$

34. б) $M(Y) = 1{,}778$; $D(Y)$ =0,795

35. $f_{r,\varphi}(U,V) = \frac{u}{\pi}$; $0 \le U \le 1$, $f_r(U) = 2u$ $0 \le V \le 2\pi$

8

1. $P(x > 10) \le \frac{6}{10}$

2. $a)$ $P(x > 8) \le \frac{1}{2}$; б) $P(x \le 6) \ge \frac{1}{3}$

3. $P \ge 0{,}9872$

4. $P_1 = 0{,}936, P_2 = 0{,}99996$

5. $P \ge 0{,}64$

6. $P \le \frac{2}{3}$

7. $\mathrm{P} \ge 0{,}5456$

8. $a)$ $P \ge 0{,}98$; б) $P \ge 0{,}955$

9. $a)$ $P \ge \frac{7}{9}$; б) $\frac{35}{36}$

10. $a)$ $P \ge \frac{7}{9}$; б) $\frac{35}{36}$

11. 400

12. 3125

13. $P > 0{,}96$

14. $P > 0{,}92$

15. 0,6355

16. Да

17. а), г) да; б), в) нет

18. –1/2

19. $n \ge 2325$; $n \ge 12\,100$

20. 0,547

21. а) Нет; б) да

22. б) $m \ge 3$

23. 0,841

24. $x \ge 148$

25. а) 0,172; б) 0,103; в) 0,171

26. а) 374; б) 0,048

27. а) 0,686; б) 0,683

9

2. $0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1$

3. $Pi,\ i+1 = \frac{5-i}{5}$; $Pi,\ i-1 = \frac{i}{5}$,
$Pij = 0$, для остальных i, j;
$Pij(2) = \frac{5+10i-2i^2}{25}, P_{i,i-2}(2) = \frac{i(i-1)}{25}$;
$P_{i,i+2}(2) = \frac{(5-i)(4-i)}{25}$,
остальные $Pij = 0$

5. 1/6

6. б) 0; 0;
$(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{108}$; 0;
$(\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{72}$

Часть II

11

1. $x = 3{,}48$; $\mathrm{M_o} = 4$; $\mathrm{M_e} = 4$; $\sigma^2 = 2{,}079$; $\sigma = 1{,}442$

2. $x = 4{,}18$; $\mathrm{M_o} = 4$; $\mathrm{M_e} = 4$; $\sigma^2 = 2{,}063$; $\sigma = 1{,}436$

4. $\bar{X} = 11{,}167$; $\sigma = 9{,}728$; $V = 87{,}1\%$

6. $\bar{X} = 7{,}323$; $\sigma = 1{,}75$; $V = 23{,}9\%$; $K_a = -0{,}817$; $E_x = 0{,}868$

12

1. (1,702; 1,898); (1089; 1215)

2. а) (0,474; 0,526); б) (0,47; 0,53)

3. (142,75; 157,25); (107062,1; 117937,9)

4. а) 3,49; 2,030; 1,4; б) (3,24; 3,74); в) 0,8294; г) 180

5. а) 4,24; 2,083; 1,443; б) (4,027; 4,453); в) 250

7. (243,3; 256,7), (34,5; 45,5), 651

8. а) 16%; 6,5%; 2,55%; б) (15; 17)

9. 385

10. (17,1; 19,4); (17; 35,5)

11. (0,662; 0,799)

14. 0,9503

15. (2,34; 2,86)

16. 0,9319

19. $\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{(b-a)^2}{12n}$, нет, нет

20. $U_{0;1}$

21. E_1.

22. $U_{0;1}$
б) ближайшее целое к числу $\dfrac{\overline{\mathrm{X}}}{p}$

26. а) $\frac{\bar{X}}{m}$;
в) $p_n^* = 1 - \frac{S^2}{\bar{X}}$ ближайшее целое к числу $m_n^* = \frac{(\bar{X})^2}{\bar{X} - S^2}$

27. $(\overline{X - a})^2$

28. $1/(\bar{X} + 1)$

29. $p_n^* = \dfrac{v_n}{(n\bar{X} + v_n)}$,
где v_n – количество элементов выборки от m

31. $(n\bar{X} + 1)/(n + 2)$

32. $\left(2^{2n+1-n\bar{X}} + 3^{n+1}\right)/$
$/6(2^{2n-n\bar{X}} + 3^n)$

34. а) 814,86 м^2; б) 921,84 м^2

35. $\left(\bar{X} - \dfrac{\sigma\varsigma_{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \dfrac{\sigma\varsigma_{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$,
где $\varsigma_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ — квантиль уровня $1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ распределения $N_{0,1}$

36. Для a: $\left(\bar{X} - \dfrac{S_0\varsigma_{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \dfrac{S_0\varsigma_{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$,
где $\varsigma_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ — квантиль уровня $1-\dfrac{\varepsilon}{2}$ *t*-распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенью свободы
$S_0 = \sqrt{S_0^2}$. Для σ^2: $\frac{nS^2}{\varsigma_{1-\frac{\varepsilon}{2}}}, \frac{nS^2}{\varsigma_{\frac{\varepsilon}{2}}}$,
где ς_δ – квантиль уровня δ распределения χ^2 с $(n-1)$ степенью свободы

15

1. $y = 0{,}339\,x + 5$;
$r = 0{,}886$; $r^2 = 0{,}785$

2. $y = 0{,}446x + 3{,}357$;
$r = 0{,}932$

3. $y = 0{,}87x + 67{,}5$

4. $y = 0{,}7454x - 5{,}36$

5. $y = -1{,}5875x^2 + 54{,}414x - 366{,}08$,
$R^2 = 0{,}8999$;
$x = 0{,}0014y^2 - 0{,}0879y + 11{,}56$,
$R^2 = 0{,}9011$

6. $y = 0{,}7614\,x + 14{,}01$;
$r = 0{,}744$; $r^2 = 0{,}553$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения функций: $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ и $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt.$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3652	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3883	72	0909	4573	44	0203	4927

Продолжение табл.

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	499841
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	499928
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	49999997
69	0957	4545	38	0235	4913			

Приложение 2

Критические точки χ^2-распределения Пирсона

ν \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Приложение 3

Критические точки t-распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,31	636,62
2	2,92	4,30	6,97	9,93	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,06	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,15	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 4

Критические точки F-распределения Фишера — Снедекора
(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии, k_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии),
уровень значимости $\alpha = 0{,}05$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	252	253	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,41	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,74	8,69	8,66	8,64	8,62	8,58	8,56	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,84	5,80	5,77	5,74	5,70	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,68	4,60	4,56	4,53	4,50	4,44	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,92	3,87	3,84	3,81	3,75	3,71	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,57	3,49	3,44	3,41	3,38	3,32	3,28	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,28	3,20	3,15	3,12	3,08	3,03	2,98	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,07	2,98	2,93	2,90	2,86	2,80	2,76	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,91	2,82	2,77	2,74	2,70	2,64	2,59	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,79	2,70	2,65	2,61	2,57	2,50	2,45	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,69	2,60	2,54	2,50	2,46	2,40	2,35	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,60	2,51	2,46	2,42	2,38	2,32	2,26	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,44	2,39	2,35	2,31	2,24	2,19	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,48	2,39	2,33	2,29	2,25	2,18	2,12	2,67
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,33	2,28	2,24	2,20	2,13	2,07	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,38	2,29	2,23	2,19	2,15	2,08	2,02	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,25	2,19	2,15	2,11	2,04	1,98	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,31	2,21	2,15	2.11	2,07	2,00	1,94	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,28	2,18	2,12	2,08	2,04	1,96	1,90	1,84

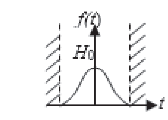
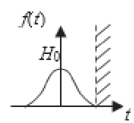
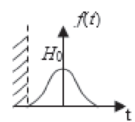
Продолжение табл.

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,23	2,13	2,07	2,03	1,98	1,91	1,84	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,18	2,09	2,02	1,98	1,94	1,86	1,80	1,73
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,05	1,99	1,95	1,90	1,82	1,76	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,02	1,96	1,91	1,87	1,78	1,72	1,65
32	4,15	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,32	2,25	2,19	2,14	2,07	1,97	1,91	1,86	1,82	1,74	1,67	1,59
36	4,11	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10	2,03	1,93	1,87	1,82	1,78	1,69	1,62	1,55
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,00	1,90	1,84	1,79	1,74	1,66	1,59	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,81	1,75	1,70	1,65	1,56	1,48	1,39
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,85	1,75	1,68	1,63	1,57	1,48	1,39	1,28
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2.26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,80	1,69	1,62	1,57	1,52	1,42	1,32	1,19
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,64	1,57	1,52	1,46	1,35	1,24	1,00

Сравнение дисперсий

1 - выборка			2 - выборки		m - выборок	
H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$ (σ_0^2 генеральная дисперсия) H_1: $\sigma^2<\sigma_0^2$			H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ H_1: $\sigma_1^2>\sigma_2^2$		H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots=\sigma_k^2$ H_1: $\sigma_1^2>\sigma_2^2>\ldots>\sigma_k^2$	H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots=\sigma_m^2$ H_1: $\sigma_1^2>\sigma_2^2>\ldots>\sigma_m^2$
Дано: n, S^2, σ_0^2			Дано: n_1, n_2, S_1^2, S_2^2		Дано: $n_1=n_2=\ldots=n_k$	Дано: $n_1\neq n_2\neq\ldots\neq n_m$ $n_i\geq 4$
$K_{набл}=\chi^2_{набл}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, $k=n-1$. а) $n<30$, $\chi^2_{кр.}$ при α, k - по таблице распределения Пирсона; б) $n>30$, $\chi^2_{кр.}$ при α, k: $\chi^2_{кр.}=k\left(1-\frac{2}{9k}+u_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3$. u_α-по таблице распределения Лапласа			$K_{набл}=F_{набл}=\frac{S_1^2}{S_2^2}$, при k_1, k_2. $S_1^2>S_2^2$, $k_1=n_1-1$, $k_2=n_2-1$		$K_{набл}=\frac{S^2\max}{\sum_{i=1}^{k}S_i^2}$, $S^2max=max\{S_i^2\}$	$K_{набл}=B_{набл}=\frac{V}{C}$ $V=2{,}303[\lg S^2-\sum_{i=1}^{k}k_i\lg S_i^2]$, $C=1+\frac{1}{3(m-1)}[\sum\frac{1}{k_i}-\frac{1}{k}]$, где $k_i=n_i-1$, $k=\sum k_i$, $S_m^2=\frac{\sum k_iS_i^2}{k}$, $\sum=\sum_{i=1}^{k}$
Двусторонний критерий	Односторонний критерий		Двусторонний критерий	Односторонний критерий	Односторонний критерий	
H_1: $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	H_1: $\sigma^2>\sigma_0^2$	H_1: $\sigma^2<\sigma_0^2$	H_1: $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	H_1: $\sigma_1^2>\sigma_2^2$		
$\chi^2_{кр.\,лев.}\leq\chi^2_{набл}\leq\chi^2_{кр.прав.}$ Тогда H_0 принимается. $\chi^2_{кр.\,лев.}$ при $(1-\alpha/2)$, k $\chi^2_{кр.\,прав.}$ при $\alpha/2$, k $\Phi(u_{\alpha/2})=(1-\alpha)/2$	$\chi^2_{набл}<$ $<\chi^2_{кр.прав.\,\alpha,\,k}$	$\chi^2_{набл}>$ $>\chi^2_{кр.лев.1-\alpha,\,k}$	$F_{набл}<F_{кр.}$ при k_1, k_2, $\alpha/2$	$F_{набл}<F_{кр.\,прав.}$ при k_1, k_2, α	По критерию Кокрена. $K_{кр.}$, α, k, m. H_0 - принимается, если $K_{набл}<K_{кр.\alpha,k,m}$. Если H_0, принята то в качестве оценки дисперсии генеральной совокупности принимают $S^2=\frac{\sum S_i^2}{m}$	Односторонний критерий H_0 принимается, если $B_{набл}<\chi^2_{кр.прав.}$ при α, k. По таблице распределения Пирсона
	$\Phi(u_\alpha)=(1-2\alpha)/2$		$F_{кр.}$ - определяется по таблице распределения Фишера – Снедекора			

1 выборка. Сравнение выборочной средней с генеральной средней (гипотетической) H_0: $\overline{X} = \overline{X}_0$ или H_0: $\overline{X} - \overline{X}_0 = 0$

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Большой объем выборки, n</td><td colspan="3">Малый объем выборки, n</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Генеральная дисперсия известна $D[X]=\sigma^2$</td><td colspan="3">Задача № 1
$K_{набл} = \frac{(\overline{X} - \overline{X}_0) \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$, H_0: $\overline{X} = \overline{X}_0$; H_0 принимается если:</td><td colspan="3" rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>Двусторонний критерий</td><td colspan="2">Односторонний критерий</td></tr>
<tr><td>H_1: $\overline{X} \neq \overline{X}_0$</td><td>$H_1$: $\overline{X} > \overline{X}_0$</td><td>$H_1$: $\overline{X} < \overline{X}_0$</td></tr>
<tr><td>$\lvert K_{набл} \rvert < K_{кр,\alpha/2}$</td><td>$K_{набл} < K_{кр,\alpha}$</td><td>$K_{набл} > -K_{кр,\alpha}$</td></tr>
<tr><td>$\Phi(K_{кр,\alpha/2}) = (1-\alpha)/2$</td><td colspan="2">$\Phi(K_{кр,\alpha}) = (1-2\alpha)/2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$K_{кр}$ - по таблице значений интеграла Лапласа, $\Phi(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Генеральная дисперсия не известна</td><td colspan="3" rowspan="6"></td><td colspan="3">Задача № 2
$K_{набл} = t_{набл} = \frac{(\overline{X} - \overline{X}_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$
$S^2 = \frac{\sum X_j^2 \cdot n_j - \frac{(\sum X_j n_j)^2}{n}}{n-1} = \frac{\sum (\overline{X}_j - \overline{X})^2}{n-1}$
H_0 принимается, если:</td></tr>
<tr><td>Двусторонний критерий</td><td colspan="2">Односторонний критерий</td></tr>
<tr><td>H_1 : $\overline{X} \neq \overline{X}_0$</td><td>$H_1$: $\overline{X} > \overline{X}_0$</td><td>$H_1$: $\overline{X} < \overline{X}_0$</td></tr>
<tr><td>$\lvert t_{набл} \rvert < t_{кр,\,k,\,\alpha/2}$</td><td>$t_{набл} < t_{кр.\,k,\alpha}$</td><td>$t_{набл} > -t_{кр,\,k,\alpha}$</td></tr>
<tr><td>
$-t_{кр} < t_{набл} < +t_{кр}$</td><td>
$t_{набл} < +t_{кр}$</td><td>
$t_{набл} > -t_{кр}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$t_{кр}$ – по таблице t – распределения Стьюдента</td></tr>
</table>

Приложение 7

2 выборки. Сравнение двух средних 2 генеральных совокупностей. H_0: $M[X_1] = M[X_2]$ или H_0: $M[X_1] - M[X_2] = 0$

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="3">2 выборки большого объема</td><td colspan="6">2 выборки малого объема</td></tr>
<tr><td colspan="3">Независимые n_1 и n_2</td><td colspan="3">Независимые n_1 и n_2</td><td colspan="3">Зависимые: $n_1=n_2=n$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Генеральные дисперсии известны D[X₁] и D[X₂]</td><td colspan="3">Задача №3
$K_{набл} = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{D[X_1]}{n_1} + \frac{D[X_2]}{n_2}}}$
H_0: $M[X_1]=M[X_2]$, H_0 принимается, если:</td><td colspan="3" rowspan="6"></td><td colspan="3" rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>Двустор. критерий</td><td colspan="2">Односторонний критерий</td></tr>
<tr><td>H_1:$M[X_1] \neq M[X_2]$</td><td>H_1:$M[X_1]>M[X_2]$</td><td>H_1:$M[X_1]<M[X_2]$</td></tr>
<tr><td>$|K_{набл}|<K_{кр.\alpha/2}$</td><td>$K_{набл}<K_{кр,\alpha}$</td><td>$K_{набл}>-K_{кр,\alpha}$</td></tr>
<tr><td>$\Phi(K_{кр,\ \alpha/2})=(1-\alpha)/2$</td><td colspan="2">$\Phi(K_{кр,\ \alpha})=(1-2\alpha)/2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$K_{кр}$ – по таблице интеграла Лапласа, $\Phi(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Генеральные дисперсии не известны</td><td colspan="3" rowspan="5"></td><td colspan="3">Задача №4
$D[X_1] \approx D[X_2]$
$K_{набл} = t_{набл} =$
$= \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{(n_1-1)\cdot S_1^2 + (n_2-1)\cdot S_2^2}} \cdot \sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$,
$k=n_1+n_2-2$.
H_0: $M[X_1]=M[X_2]$
H_0 принимает если:</td><td colspan="3">Задача №5
$K_{набл} = t_{набл} = \dfrac{\bar{d}\cdot\sqrt{n}}{S_d}$, где
$\bar{d} = \dfrac{\sum d_j}{n}$; $d_j = X_{1j} - X_{2j}$;
$S_d = \sqrt{\dfrac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n-1}}$; $k = n-1$ H_0 принимается если:</td></tr>
<tr><td>Двустор. критерий</td><td colspan="2">Односторонний критерий</td><td>Двустор. критерий</td><td colspan="2">Односторонний критерий</td></tr>
<tr><td>H_1:$M[X_1] \neq M[X_2]$</td><td>H_1:$M[X_1]>M[X_2]$</td><td>H_1:$M[X_1]<M[X_2]$</td><td>H_1:$M[X_1] \neq M[X_2]$</td><td>H_1:$M[X_1]>M[X_2]$</td><td>H_1:$M[X_1]<M[X_2]$</td></tr>
<tr><td>$|t_{набл}|<t_{кр,\ \alpha/2,k}$</td><td>$t_{набл}<t_{кр,\ \alpha,k}$</td><td>$t_{набл}>-t_{кр,\ \alpha,k}$</td><td>$|t_{набл}|<t_{кр,\ \alpha/2,\ k}$</td><td>$t_{набл}<t_{кр,\ \alpha,\ k}$</td><td>$t_{набл}>-t_{кр,\ \alpha,\ k}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$t_{кр}$ по таблице распределения Стьюдента</td><td colspan="3">$t_{кр}$ по таблице распределения Стьюдента</td></tr>
</table>

Приложение 8

Исходные данные к контрольным заданиям

№ варианта	1						
	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3	k
1	1	4	5	0,8	0,6	0,5	3
2	2	5	3	0,7	0,8	0,6	4
3	4	3	2	0,6	0,5	0,4	5
4	6	2	2	0,5	0,4	0,8	6
5	3	5	2	0,7	0,9	0,4	5
6	1	2	7	0,8	0,3	0,5	4
7	2	3	5	0,4	0,8	0,4	7
8	3	1	6	0,5	0,8	0,7	6
9	1	3	6	0,7	0,4	0,4	5
10	2	7	1	0,4	0,5	0,6	7
11	4	2	6	0,5	0,6	0,5	3
12	9	9	10	0,2	0,8	0,7	7
13	1	5	9	0,3	0,3	0,6	6
14	2	3	1	0,6	0,8	0,5	4
15	1	2	3	0,6	0,8	0,4	6
16	1	4	4	0,8	0,1	0,8	3
17	6	4	4	0,3	0,8	0,3	4
18	4	9	5	0,1	0,3	0,4	5
19	5	4	10	0,4	0,5	0,5	8
20	8	10	3	0,8	0,9	0,3	3
21	10	1	7	0,6	0,4	0,4	7
22	8	10	5	0,2	0,1	0,4	9
23	4	8	4	0,7	0,6	0,4	6
24	8	2	3	0,6	0,5	0,4	7
25	2	4	5	0,2	0,6	0,8	7
26	6	4	10	0,6	0,3	0,3	7
27	1	3	1	0,5	0,2	0,3	6
28	9	2	3	0,9	0,4	0,8	3
29	8	7	8	0,2	0,2	0,9	3
30	8	2	2	0,7	0,7	0,7	4
31	8	7	3	0,4	0,5	0,3	9

Продолжение приложения 8

№	2	3								4				5		6
	N	n_1	n_2	n_3	n_4	m_1	m_2	m_3	m_4	n	l	m	k	k	n	k
1	3	1	2	3	4	1	1	2	3	10	2	4	6	6	4	4
2	4	2	2	4	2	1	1	1	2	10	2	3	6	7	4	5
3	5	2	3	4	1	1	2	3	1	10	3	5	7	8	5	6
4	6	1	4	2	3	1	2	1	2	10	3	5	6	9	5	5
5	7	4	2	2	2	3	1	2	1	11	2	5	7	10	6	6
6	8	3	2	3	2	2	1	3	1	11	3	4	8	11	4	7
7	9	5	1	2	2	3	1	1	1	11	3	5	7	12	4	6
8	10	2	5	2	1	1	3	1	1	12	3	8	5	13	3	7
9	3	4	2	3	2	2	1	2	1	12	2	8	3	14	3	8
10	4	3	3	4	1	2	1	2	1	12	2	5	4	13	4	7
11	5	2	3	3	3	1	2	3	1	9	2	4	6	12	3	8
12	6	1	3	4	3	1	2	2	1	9	3	5	6	11	3	5
13	7	2	3	4	2	1	2	3	1	9	2	3	7	10	4	6
14	8	1	2	3	5	1	1	2	3	8	2	4	5	9	4	7
15	9	2	3	4	2	1	2	2	1	8	2	5	4	8	3	8
16	10	3	2	2	4	2	1	1	1	8	3	4	5	7	3	9
17	11	4	3	2	3	2	1	2	1	10	4	6	5	6	4	8
18	12	3	3	4	2	2	1	2	2	10	5	7	7	7	4	7
19	13	2	4	5	1	2	2	3	1	10	4	6	7	8	5	6
20	14	3	4	3	2	2	2	3	2	12	4	8	6	9	5	5
21	15	2	5	2	3	1	3	1	2	8	2	3	4	10	6	4
22	16	4	4	2	2	2	2	2	1	8	2	3	5	11	4	4
23	17	2	7	2	1	1	5	2	1	8	2	4	3	12	4	5
24	18	3	1	6	2	2	1	3	1	8	3	5	4	13	3	6
25	19	2	2	2	3	1	1	1	2	8	1	4	2	14	3	7
26	20	1	3	3	2	1	3	1	1	9	2	3	5	12	3	8
27	3	1	4	2	2	0	2	1	1	9	3	4	4	11	3	9
28	4	2	3	1	3	1	2	0	1	9	2	6	3	10	4	10

Продолжение табл.

№	2	3								4				5		6
	N	n_1	n_2	n_3	n_4	m_1	m_2	m_3	m_4	*n*	*l*	*m*	*k*	*k*	*n*	*k*
29	5	3	1	2	3	0	1	1	2	9	4	5	5	9	4	9
30	6	3	2	3	1	2	2	2	0	9	3	5	4	8	3	8
31	8	2	3	1	3	2	1	0	2	9	2	3	6	7	3	7

Продолжение приложения 8

№	7			8			9		10				11
	T_1	T_2	*t*	*R*	S_1	S_2	k_1	k_2	p_1	p_2	n_1	n_2	*k*
1	900	1000	10	11	2,25	3,52	71	47	0,61	0,55	2	3	4
2	900	1100	20	12	2,37	3,52	78	39	0,62	0,54	3	2	5
3	1000	1100	10	13	2,49	3,52	87	31	0,63	0,53	2	3	6
4	1000	1200	20	14	2,55	1,57	72	46	0,64	0,52	3	2	7
5	1100	1200	15	11	2,27	5,57	79	38	0,65	0,51	2	3	8
6	1100	1300	15	12	2,39	5,57	86	32	0,66	0,49	3	2	9
7	900	930	10	13	2,51	1,57	73	45	0,67	0,48	2	3	10
8	900	1130	20	14	2,57	3,52	81	37	0,68	0,47	3	2	11
9	1000	1030	15	11	2,29	3,52	85	33	0,69	0,46	2	3	4
10	1000	1130	15	12	2,41	3,52	74	44	0,71	0,45	3	2	5
11	1100	1130	5	13	2,53	3,52	82	36	0,72	0,44	2	3	6
12	1100	1230	5	14	2,59	5,57	84	34	0,73	0,43	3	2	7
13	1200	1300	5	15	2,5	8,7	75	43	0,74	0,42	2	3	8
14	1200	1230	10	16	2,6	8,5	83	35	0,75	0,41	3	2	9
15	1200	1330	5	11	2,2	3,5	76	42	0,76	0,39	2	3	10
16	1300	1400	10	12	2,4	3,5	77	41	0,77	0,38	3	2	12
17	1800	1900	10	13	2,5	3,5	47	71	0,78	0,37	2	3	5
18	1800	2000	20	14	2,6	1,8	39	78	0,39	0,45	3	2	6
19	1700	1800	10	15	2,7	7,9	31	87	0,38	0,46	2	3	7
20	1700	1900	20	16	2,7	8,2	72	46	0,37	0,47	3	2	8
21	1900	2000	15	11	2,3	3,5	38	79	0,36	0,48	2	3	9
22	1900	2100	15	12	2,4	3,5	32	86	0,35	0,49	3	2	10

Продолжение табл.

№	7			8			9		10				11
	T_1	T_2	t	R	S_1	S_2	k_1	k_2	p_1	p_2	n_1	n_2	k
23	1700	1730	10	13	2,5	3,5	73	45	0,34	0,51	2	3	11
24	1700	1830	20	14	2,6	5,6	81	37	0,33	0,52	3	2	4
25	1600	1630	15	15	2,5	8,7	33	85	0,32	0,53	2	3	5
26	1600	1730	15	11	2,3	5,6	44	74	0,31	0,54	3	2	6
27	1700	1730	5	12	2,4	5,6	36	82	0,29	0,55	2	3	7
28	1700	1830	5	13	2,5	3,5	84	34	0,28	0,56	3	2	8
29	1600	1700	5	14	2,6	5,6	75	43	0,27	0,57	2	3	9
30	1600	1630	10	15	2,7	7,9	83	35	0,26	0,58	3	2	10
31	1600	1730	5	12	2,25	3,52	76	42	0,25	0,59	2	3	11

Продолжение приложения 8

№	12	13		14					15								16		
	M	n_1	n_2	N_1	M_1	N_2	M_2	K	k	l	m	n	m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3	j
1	12	100	250	4	1	2	5	3	8	10	3	2	50	30	20	70	80	90	1
2	8	430	180	7	3	5	1	4	7	6	2	3	50	30	20	70	80	90	2
3	5	170	540	2	3	5	4	1	6	8	3	1	50	30	20	70	80	90	3
4	11	520	390	8	2	3	2	5	12	5	3	2	60	20	20	70	80	90	1
5	7	360	600	6	4	1	7	2	13	11	2	4	60	20	20	70	80	90	2
6	10	700	90	3	2	4	4	2	11	8	2	5	60	20	20	70	80	90	3
7	6	240	610	5	5	4	10	4	12	7	2	4	40	30	30	80	80	90	1
8	9	80	710	13	12	4	6	3	9	6	2	3	40	30	30	80	80	90	2
9	3	630	230	1	9	3	3	4	10	7	4	1	40	30	30	80	80	90	3
10	8	500	320	3	7	5	2	3	11	7	4	4	40	20	40	90	90	80	1
11	5	810	70	4	6	7	8	5	13	8	5	2	40	20	40	90	90	80	2
12	10	450	280	2	3	7	1	2	8	7	3	3	40	20	40	90	90	80	3
13	10	270	640	2	2	3	1	1	12	10	4	2	70	20	10	70	80	90	1
14	9	380	470	2	8	3	1	3	9	6	1	3	70	20	10	70	80	90	2
15	4	640	80	6	4	3	3	4	6	8	3	2	70	20	10	70	80	80	3
16	7	160	570	5	5	4	3	3	14	13	3	3	60	10	30	80	90	80	1
17	5	590	200	25	3	25	2	2	11	10	4	5	60	10	30	80	90	80	2

Продолжение табл.

№	12	13		14					15								16		
	M	n_1	n_2	N_1	M_1	N_2	M_2	*K*	*k*	*l*	*m*	*n*	m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3	*j*
18	8	620	190	20	1	40	7	3	7	5	2	2	60	10	30	80	90	80	3
19	9	730	100	20	4	25	5	1	15	9	4	3	50	20	30	90	80	90	1
20	6	540	200	50	8	20	6	2	8	10	3	3	50	20	30	90	80	90	2
21	12	90	690	40	8	10	2	3	12	5	2	2	50	20	30	90	80	90	3
22	8	220	550	25	2	20	4	1	14	11	3	5	30	30	40	70	70	80	1
23	10	290	700	20	1	40	5	5	6	7	2	2	30	30	40	70	70	80	2
24	7	350	440	25	2	25	6	4	13	9	4	4	30	30	40	70	70	80	3
25	3	470	360	10	3	50	11	2	9	6	3	3	20	40	40	90	70	80	1
26	6	680	230	20	1	20	4	1	11	10	2	5	20	40	40	90	70	80	2
27	9	710	160	25	3	25	7	3	7	8	4	3	20	40	40	90	70	80	3
28	4	180	270	40	5	50	8	2	12	11	5	4	10	50	40	70	90	80	1
29	7	260	620	40	8	20	4	2	8	3	2	2	10	50	40	70	90	80	2
30	5	650	140	25	3	40	2	4	6	6	1	2	10	50	40	70	90	80	3
31	8	230	480	20	1	50	6	1	10	8	3	3	20	30	50	70	70	90	1

Продолжение приложения 8

№	17		18		19				
	n	*m*	*p*	*n*	*n*	n_1	n_2	p_1	p_2
1	3	2	0,3	10	15	1	2	0,1	0,2
2	7	3	0,3	14	15	2	1	0,15	0,15
3	4	7	0,3	13	15	2	2	0,15	0,15
4	4	3	0,3	12	15	1	1	0,1	0,15
5	3	6	0,3	11	15	3	2	0,2	0,25
6	6	5	0,3	15	15	2	2	0,15	0,2
7	3	5	0,4	11	15	3	1	0,2	0,15
8	8	3	0,4	13	15	1	2	0,13	0,17
9	6	4	0,4	14	15	2	1	0,14	0,16
10	4	5	0,4	10	15	1	3	0,16	0,24
11	2	7	0,4	12	15	3	2	0,17	0,23
12	5	4	0,4	15	15	3	1	0,18	0,12
13	8	6	0,5	12	15	4	1	0,19	0,11

Продолжение табл.

№	17		18		19				
	n	*m*	*p*	*n*	*n*	n_1	n_2	p_1	p_2
14	2	6	0,4	12	15	3	3	0,2	0,26
15	2	3	0,5	11	14	1	3	0,09	0,21
16	4	2	0,5	13	14	1	4	0,1	0,21
17	7	6	0,5	14	14	2	2	0,11	0,2
18	5	3	0,5	15	14	2	4	0,12	0,2
19	4	6	0,6	13	14	3	3	0,15	0,2
20	8	5	0,6	11	14	2	3	0,2	0,2
21	6	3	0,6	12	14	3	4	0,3	0,2
22	5	2	0,6	10	14	2	3	0,1	0,2
23	3	7	0,6	15	14	3	4	0,2	0,25
24	6	8	0,6	14	14	5	4	0,25	0,35
25	5	6	0,7	14	14	4	4	0,21	0,39
26	7	4	0,7	10	14	4	3	0,1	0,3
27	5	7	0,5	11	14	2	2	0,25	0,35
28	6	2	0,6	12	14	1	2	0,1	0,15
29	7	5	0,7	12	14	1	1	0,05	0,15
30	8	4	0,7	13	14	1	2	0,1	0,1
31	7	2	0,3	13	14	2	2	0,05	0,05

Продолжение приложения 8

№	20			21			
	m	*n*	*p*	*N*	*p*	k_1	k_2
1	7	500	0,003	100	0,8	80	90
2	7	500	0,004	100	0,8	85	95
3	8	500	0,008	100	0,8	70	95
4	6	600	0,009	100	0,7	83	93
5	10	600	0,003	100	0,7	50	60
6	7	600	0,009	100	0,7	65	75
7	8	700	0,005	100	0,7	70	80
8	6	700	0,007	100	0,6	40	50

Продолжение табл.

№	20			21			
	m	*n*	*p*	*N*	*p*	k_1	k_2
9	5	700	0,004	100	0,75	65	80
10	7	800	0,002	100	0,75	70	85
11	6	800	0,006	100	0,75	68	78
12	10	800	0,001	100	0,7	60	—
13	9	900	0,004	100	0,7	70	—
14	8	900	0,007	100	0,7	80	—
15	6	900	0,002	100	0,6	65	—
16	6	1000	0,005	100	0,6	75	—
17	8	1000	0,002	100	0,6	50	—
18	9	500	0,005	100	0,8	70	—
19	7	500	0,009	100	0,8	80	—
20	9	500	0,004	100	0,8	90	—
21	6	600	0,003	100	0,8	95	—
22	5	600	0,006	100	0,3	—	20
23	9	600	0,004	100	0,3	—	30
24	8	700	0,003	100	0,3	—	40
25	8	700	0,001	200	0,4	—	80
26	9	700	0,003	200	0,4	—	90
27	9	800	0,001	200	0,4	—	100
28	7	800	0,009	300	0,8	—	250
29	10	800	0,005	400	0,6	—	270
30	7	900	0,003	400	0,7	—	290
31	7	900	0,009	400	0,8	—	300

Продолжение приложения 8

№	22				23			24, 25		
	a	*b*	x_1	x_2	*n*	*p*	*a*	*m*	*a*	*b*
1	2,5	4	3	3,3	5	0,37	—	4	0	2
2	1,5	3	2	2,6	14	0,28	—	3	1	2
3	1,5	2,5	2	2,3	6	0,53	—	2	2	3

Продолжение табл.

№	22				23			24, 25		
	a	*b*	x_1	x_2	*n*	*p*	*a*	*m*	*a*	*b*
4	1	3,5	2	2,8	9	0,46	—	5	2	3
5	–1	2	–0,7	1,1	7	0,18	—	4	3	4
6	–2	1	–1,5	0,3	3	0,67	—	3	1	5
7	–3	5	2	2	8	0,32	—	2	0	2
8	–1,5	2,5	–1	0	10	0,87	—	3	2	3
9	1	1,8	1,3	1,6	4	0,25	—	4	3	4
10	1	2,4	1,5	2	12	0,41	—	2	4	5
11	2	3,5	2,5	3	—	—	0,68	5	0	6
12	2	2,8	2,1	2,5	—	—	0,35	4	1	2
13	1	2,8	–1	3	—	—	0,21	3	2	4
14	1	2,6	1,5	3	—	—	0,89	5	2	3
15	2	3	1	3	—	—	0,72	4	3	5
16	2	4,8	4,5	5	—	—	0,43	4	0	4
17	–4	–2	–1	0	—	—	0,17	3	1	2
18	–3	–1	9	0	—	—	0,95	2	2	3
19	2	4	0	3	—	—	0,38	4	3	4
20	1	3	0	2	—	—	0,63	3	4	5
21	1	1,5	0	0,5	—	—	0,026	4	0	5
22	–1	1,5	0	1	—	—	0,38	5	1	6
23	–1,5	–1	–1	3	—	—	0,033	6	3	4
24	–1,5	1	–1	1	—	—	0,218	5	2	3
25	0,5	1	0	3	—	—	0,65	4	3	5
26	0,2	2	0	4	—	—	0,816	3	0	2
27	0,5	3	0	0,5	—	—	0,74	4	1	3
28	0,4	4	1	5	—	—	0,015	5	2	3
29	1/4	1	0	3	—	—	0,671	4	3	5
30	0,02	2	0	3	—	—	0,324	3	4	6
31	0,05	4	0	10	—	—	0,57	2	3	2

Продолжение приложения 8

№	$P(x)$	$y=\varphi(x)$	№	$P(x)$	$y=\varphi(x)$
26.1	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$y=\lvert x\rvert$	26.2	$\begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 0,\ x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$y=e^{-x^2}$
26.3	$\begin{cases} \frac{1}{\pi},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 0,\ x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$y=\lvert x\rvert$	26.4	$\frac{1}{\pi\,\mathrm{ch}x}$	$y=e^{-x^2}$
26.5	$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$	$y=\lvert x\rvert$	26.6	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$y=e^{-x^2}$
26.7	$\begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 0,\ x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$y=\lvert x\rvert$	26.8	$\begin{cases} \frac{1}{\pi},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 0,\ x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$y=e^{-x^2}$
26.9	$\frac{1}{\pi\,\mathrm{ch}x}$	$y=\lvert x\rvert$	26.10	$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$	$y=e^{-x^2}$
26.11	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$y=e^{-x^2}$	26.12	$\begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 0,\ x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$y=e^{-x^2}$
26.13	$\begin{cases} \frac{1}{\pi},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 0,\ x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$y=e^{-x^2}$	26.14	$\frac{1}{\pi\,\mathrm{ch}x}$	$y=e^{-x^2}$
26.15	$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$	$y=e^{-x^3}$	26.16	$\begin{cases} \frac{1}{\pi},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \\ 0,\ x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$y=2x+3$
26.17	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$y=2x+3$	26.18	$\frac{1}{\pi\,\mathrm{ch}x}$	$y=4x+5$
26.19	$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$	$y=2x+3$	26.20	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$y=6x+4$

Продолжение приложения 8

№	$P_\xi(x)$	$y=\varphi(x)$	№	$P_\xi(x)$	$y=\varphi(x)$
26.21	$\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^2 x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\\ 0,\ x\overline{\in}\ \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$	$y=2x+3$	26.22	$\begin{cases}\frac{1}{\pi},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\\ 0,\ x\overline{\in}\ \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$	$y=6x+4$
26.23	$\frac{1}{\pi ch x}$	$y=2x+3$	26.24	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$y=6x+4$
26.25	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$y=4x+5$	26.26	$\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^2 x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, x\overline{\in}\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$	$y=6x+4$
26.27	$\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, x\overline{\in}\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$	$y=4x+5$	26.28	$\frac{1}{\pi ch x}$	$y=6x+4$
26.29	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$y=4x+5$	26.30	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$y=8x+1$
26.31	$\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^2 x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, x\overline{\in}\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$	$y=4x+5$			

Продолжение приложения 8

№	27			28						30		31			
	a	b	n	x_A	y_A	x_B	y_B	x_C	y_C	α_1	α_2	α	n	x_1	x_2
1	1	2	I	0	0	1	1	1	–1	–1	0,1	1/3	108	17	20
2	2	1	2	0	0	–1	1	1	1	–2	0,2	1/4	162	22	26
3	3	2	3	0	0	–1	1	–1	–1	–3	0,3	1/5	300	28	33
4	2	3	2	0	0	–1	–1	1	–1	–4	0,4	1/6	432	35	38
5	4	2	4	0	0	2	2	2	–2	–0,5	0,05	1/7	584	40	44
6	2	4	2	0	0	–2	2	2	2	–1,5	0,15	1/5	768	46	51
7	3	4	2	0	0	–2	2	–2	–2	–2,5	0,06	1/9	972	53	56
8	4	3	2	0	0	–2	–2	2	–2	–3,5	0,07	1/10	1200	58	62

Продолжение табл.

№	27			28						30		31			
	a	b	n	x_A	y_A	x_B	y_B	x_C	y_C	α_1	α_2	α	n	x_1	x_2
9	5	1	2	1	1	1	–1	0	0	–5	0,08	1/11	1432	64	69
10	5	2	5	–1	1	1	1	0	0	–6	0,25	1/12	1728	71	74
11	5	3	4	–1	1	–1	–1	0	0	–7	0,26	1/13	2028	76	80
12	3	5	2	–1	–1	1	–1	0	0	0	0,27	2/3	108	34	40
13	2	2	3	2	2	2	–2	0	0	–4,5	0,01	1/2	162	44	52
14	3	7	3	–2	2	2	2	0	0	–5,5	0,02	2/5	300	56	66
15	7	4	2	–2	2	-2	–2	0	0	–6,5	0,03	2/7	584	80	88
16	4	5	1	–2	-2	2	–2	0	0	–7,5	0,04	2/9	972	106	112
17	1	2	1	–1	0	0	1	0	–1	–9	0,06	2/11	1454	128	138
18	2	1	2	–1	0	0	2	0	–2	0	0,09	2/13	2028	152	160
19	3	2	3	–1	0	0	–1	0	1	–11	0,31	1	108	51	60
20	2	3	2	–1	0	0	–2	0	2	–12	0,32	3/4	162	66	78
21	4	2	4	–1	0	1	1	1	–1	–8,5	0,33	3/5	300	74	99
22	2	4	2	–1	0	1	2	1	–2	–9,5	0,34	3/7	584	120	152
23	3	4	2	–1	0	1	–1	1	1	–10,5	0,36	3/8	768	138	153
24	4	3	2	–1	0	1	–2	1	2	–11,5	0,37	3/10	1200	174	186
25	5	1	2	0	–1	–1	0	1	0	–13	0,49	3/11	1452	192	207
26	5	2	5	0	–1	–2	0	2	0	–14	0,48	3/13	2028	228	240
27	5	3	4	0	–1	1	0	–1	0	–15	0,47	1/14	584	20	22
28	3	5	2	0	–1	2	0	–2	0	–16	0,46	1/20	1200	29	31
29	2	2	3	0	0	1	1	1	–1	–1,4	0,44	1/26	2028	38	40
30	3	7	3	0	0	–1	1	1	1	–1,6	0,43	2	108	102	120
31	7	4	2	0	0	–1	–1	1	–1	–1,8	0,42	3/2	162	132	156

Приложение 9

Динамика урожайности с.-х. культур в учхозе «К», ц/га

№ п/п	Годы	Озимые зерновые	Кукуруза	Подсолнечник
1	1969	37,5	70,3	25,2
2	1970	33,8	44,2	15,3
3	1971	37,9	48,4	23,1
4	1972	36,8	50,9	27,4
5	1973	39,2	40,3	26,5
6	1974	40,8	22,5	23,5
7	1975	56,2	20,0	25,9
8	1976	44,5	16,3	20,9
9	1977	39,6	34,6	22,7
10	1978	50,6	56,9	27,4
11	1979	30,2	20,5	20,2
12	1980	54,2	65,9	29,1
13	1981	49,8	61,7	27,5
14	1982	49,1	41,6	29,0
15	1983	47,0	47,2	28,5
16	1984	39,1	41,9	26,8
17	1985	49,2	33,7	24,0
18	1986	51,8	64,4	11,3
19	1987	47,9	77,8	28,3
20	1988	54,8	72,6	20,4
21	1989	42,8	61,2	28,0
22	1990	58,0	52,0	20,5
23	1991	48,9	76,8	20,3
24	1992	48,9	43,2	16,1
25	1993	56,7	55,9	8,2
26	1994	66,0	69,5	27,0
27	1995	46,9	41,2	14,0
28	1996	48,6	32,4	17,1
29	1997	49,4	52,7	19,3
30	1998	45,7	11,9	14,4
31	1999	43,4	30,1	10,3
32	2000	31,5	32,9	9,8
33	2001	44,4	35,7	9,0
34	2002	53,4	6,2	12,7
35	2003	59,5	24,6	18,9
36	2004	62,3	15,0	13,4
37	2005	78,8	—	12,8
38	2006	76,3	35,0	17,7

Продолжение табл.

№ п/п	Годы	Озимые зерновые	Кукуруза	Подсолнечник
39	2007	48,8	21,9	20,7
40	2008	61,8	61,7	26,6
41	2009	66,9	34,7	21,4
42	2010	57,7	61,5	26,2
43	2011	47,8	36,2	21,8
44	2012	76,9	65,7	31,2
45	2013	54,8	45,9	22,8
46	2014	67,3	34,5	25,9
47	2015	77,6	18,2	20,9
48	2016	48,2	16,3	75,1
49	2017	60,4	20,6	70,1
50	2018	69,6	22,6	47,9
51	2019	77,9	79,2	26,3
52	2020	69,4	60,0	25,4
53	2021	77,5	49,8	20,2

Приложение 10

Показатели по средним и крупным сельскохозяйственным организациям Краснодарского края

№ п/п	Валовая продукция, тыс. руб.	Выручка от реализации продукции, работ, услуг, тыс. руб.	Основные средства, тыс. руб.	Оборотные средства, тыс. руб.	Численность работников, чел.	Начислено за год заработной платы, тыс. руб.	Материальные затраты, тыс. руб.	Затраты на валовую продукцию, тыс. руб.	Сельскохозяйственные угодья, га	Затраты на реализованную продукцию, тыс. руб.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	790034	684951	602131	643541	449	118029	262942	566623	12239	451708
2	950778	644939	736069	690504	477	134976	340753	691748	9202	442123
3	321963	338485	193860	266172,5	134	38248	136746	293444	8628	293444
4	590983	400430	390081	395255,5	205	64620	375926	470451	6464	283433
5	610358	491823	367913	429868	292	78390	325051	515562	8188	394557
6	328275	257612	278515	268063,5	220	58653	145705	250760	5078	177971
7	1476711	1161049	1427897	1294473	751	199798	471673	1010903	20989	732586
8	62003	52928	60650	56789	54	6785	23210	42956	1324	34200
9	745489	617426	513833	565629,5	455	110692	348259	560045	7628	442157
10	297827	315918	108340	212129	184	45767	114360	206101	7910	255112
11	184982	159123	110224	134673,5	139	26508	95124	154125	2962	124694
12	682349	602540	570148	586344	501	97802	312969	514077	8909	433204
13	399002	345771	341284	332795	234	48132	126576	178376	4571	151552

Продолжение табл.

№ п/п	Валовая продукция, тыс. руб.	Выручка от реализации продукции, работ, услуг, тыс. руб.	Основные средства, тыс. руб.	Оборотные средства, тыс. руб.	Численность работников, чел.	Начислено за год заработной платы, тыс. руб.	Материальные затраты, тыс. руб.	Затраты на валовую продукцию, тыс. руб.	Сельскохозяйственные угодья, га	Затраты на реализованную продукцию, тыс. руб.
14	181144	168587	125583	147085	118	26484	82713	146873	3788	134710
15	340261	353433	244116	298774,5	162	38439	96655	210274	6464	209274
16	319666	259264	296263	277763,5	199	34666	139422	232282	5091	191774
17	125544	86129	66196	76162,5	70	24705	18366	81281	1103	65255
18	66342	54824	40674	47749	53	8165	32125	59325	1888	51537
19	621294	443025	337674	390349,5	551	77307	370675	494055	14042	314053
20	1152571	713732	930819	822275,5	903	215209	655163	1007888	11023	594369
21	91177	95076	51340	73208	35	13068	50134	88363	2645	88363
22	275538	229124	259637	244380,5	155	46526	190085	295089	3578	239288
23	202593	216423	237846	227134,5	62	22880	60320	189430	2940	180219
24	96597	68556	96347	82451,5	32	5232	33287	78668	1162	53846
25	43753	36226	29767	32996,5	30	6167	17414	30853	1224	27315
26	141606	146831	106118	126474,5	93	27968	55468	119814	2948	119814
27	245973	212193	506473	359333	124	23846	99989	179976	5097	175108
28	304898	287385	119321	203353	150	35972	133157	258361	6486	258361
29	255818	217429	165019	191224	108	27020	134168	193369	5475	165246
30	110250	68809	88356	78582,5	62	11986	47342	77681	2311	47103

Продолжение табл.

№ п/п	Валовая продукция, тыс. руб.	Выручка от реализации продукции, работ, услуг, тыс. руб.	Основные средства, тыс. руб.	Оборотные средства, тыс. руб.	Численность работников, чел.	Начислено за год заработной платы, тыс. руб.	Материальные затраты, тыс. руб.	Затраты на валовую продукцию, тыс. руб.	Сельскохозяйственные угодья, га	Затраты на реализованную продукцию, тыс. руб.
31	64536	54873	62753	58813	24	5612	41314	58833	1819	49583
32	43014	34209	57896	46052,5	18	3898	19046	30165	1000	26012
33	57219	57299	56704	57001,5	33	7453	33795	48571	1306	48571
34	376058	202278	190953	196615,5	97	35112	172782	254639	6354	132781
35	219652	181102	98829	139965,5	88	21605	39608	113178	6692	111908
36	56672	54827	81495	68161	20	4697	29623	47521	1257	45473
37	619786	481882	334469	408175,5	204	49695	337035	486014	8509	331757
38	497304	418322	411514	414918	271	68534	167351	359119	8377	272371
39	909107	524104	406604	465354	494	160747	437749	770686	6699	417501
40	315265	195365	209221	202293	146	39059	85529	249652	4420	136877
41	276468	180947	165980	173463,5	125	28107	161661	214216	4620	143908
42	258323	229644	134834	182239	93	25413	109859	173107	5822	159309
43	83022	68715	62455	65585	17	6337	37192	50954	1291	16873
44	108079	98183	102192	100187,5	46	13779	34501	68516	2261	67753
45	54637	58177	48060	53118,5	23	6643	21329	42524	1447	42524
46	93684	71490	44834	58162	25	6540	43406	64206	2613	53671
47	82970	88554	86006	87280	40	4799	22851	51369	2213	49845
48	235243	205619	151890	178754,5	158	41496	96352	183855	6084	167294

Продолжение табл.

№ п/п	Валовая продукция, тыс. руб.	Выручка от реализации продукции, работ, услуг, тыс. руб.	Основные средства, тыс. руб.	Оборотные средства, тыс. руб.	Численность работников, чел.	Начислено за год заработной платы, тыс. руб.	Материальные затраты, тыс. руб.	Затраты на валовую продукцию, тыс. руб.	Сельскохозяйственные угодья, га	Затраты на реализованную продукцию, тыс. руб.
49	127722	114020	200018	157019	46	8898	39711	63245	1792	63245
50	115407	97770	95804	96787	56	11052	76413	95840	3846	86940
51	282304	249711	180805	215258	173	46865	110291	199912	7878	181235
52	275848	210099	170850	190474,5	163	42620	51777	148165	3966	116315
53	391199	382229	226617	304423	322	64993	117174	294514	12226	292411
54	214313	210615	153090	181852,5	138	28479	87829	186021	6749	186021
55	38406	32486	32743	27137,5	17	2200	13960	23390	1070	21070
56	367015	251906	205445	228675,5	265	75794	133549	317649	4463	210227
57	443788	247345	255262	251303,5	291	64098	281215	410962	4994	226749
58	231644	226446	254426	240436	150	41015	77962	152854	4932	164764
59	1025296	713802	1022750	868276	458	159224	548578	861741	12338	556478
60	682126	462107	425948	444027,5	437	112603	236000	618389	6837	392458
61	92086	66950	40873	53911,5	25	8266	51201	94117	2642	64397
62	576507	525511	693934	609722,5	320	71013	222733	394686	9754	384065
63	1011692	957724	782870	870297	475	114802	372005	755913	24144	742786
64	737680	557320	499018	528169	667	174783	465099	702116	10878	501215
65	458549	295838	162028	228933	337	67652	312782	432876	7301	285036

ОГЛАВЛЕНИЕ

Игорь Александрович КАЦКО,
Петр Сергеевич БОНДАРЕНКО,
Галина Викторовна ГОРЕЛОВА,
Саида Казбековна КУИЖЕВА,
Нодира Хасановна ВОРОКОВА,
Надежда Сергеевна ЖМИНЬКО

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Учебное пособие

Зав. редакцией
физико-математической литературы *О. Е. Гайнутдинова*
Ответственный редактор *В. В. Яески*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *В. А. Иутин*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д. 1, лит. А
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 16.01.23.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $^1/_{16}$.
Печать офсетная/цифровая. Усл. п. л. 16,58. Тираж 30 экз.

Заказ № 111-23.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.